На правах рукописи

Глызин Дмитрий Сергеевич

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ И ХАОС
В НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2006

Работа выполнена на кафедре математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Колесов Андрей Юрьевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Майоров Вячеслав Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор Старков Сергей Олегович

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится «____»__________ 2006 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 212.002.04 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «____»__________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Краевые задачи гиперболического типа описывают большой класс физических моделей, связанных с проблемами распространения волн различной природы. При этом в нелинейной постановке такие задачи решаются, как правило, численно, аналитические же результаты в этой области появляются достаточно редко.

Одним из наиболее содержательных примеров привлечения к моделированию физических явлений нелинейных волновых уравнений является математическая модель $RCLG$ автогенератора с отрезком длинной линии в цепи обратной связи. Эта задача была поставлена и частично решена А.А. Виттом[1]. Она состоит из линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, а нелинейность содержится в краевых условиях. При решении проблемы Витт использовал метод медленно меняющихся фаз и амплитуд и на этом пути получил асимптотические формулы для периодических решений изучаемой задачи. Вид асимптотических формул позволил, кроме того, заключить, что при подходящем выборе параметров данная краевая задача может обладать произвольным наперед заданным числом циклов. Такое явление приобрело название буферности, и под ним в настоящий момент понимают сосуществование в фазовом пространстве динамической системы сколь угодно большого числа однотипных аттракторов (циклов, торов и т.д.) Следует отметить, что результаты, полученные Виттом, были в значительной степени эвристическими, поскольку отсутствовал необходимый математический аппарат для их обоснования.

В целом, нелинейные краевые задачи гиперболического типа довольно долго изучались лишь в квазилинейной постановке. Такой подход подробно изложен и обоснован, например, в книге Ю.А. Митропольского и Б.И. Мосеенкова[2]. Бифуркационные задачи для уравнений гиперболического типа начали изучаться лишь в конце прошлого века в работах Ю.С. Колесова, А.Ю. Колесова и С.А. Кащенко.

Основная трудность, с которой приходится сталкиваться в этой ситуации, состоит в том, что при критических значениях параметров счетное число точек спектра оператора линеаризованной задачи лежат на мнимой оси. Тем самым реализуется так называемое бесконечномерное вырождение. Одной из характерных задач, обладающих таким свойством, является телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\Big(u, \frac{\partial u}{\partial t}\Big), \tag{1}$$

[1] *Витт А.А.* Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. – 1934. – Т.4, № 1. – С. 144 - 157.

[2] *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа, 1976.

с краевыми условиями Дирихле или Неймана на границах отрезка изменения пространственной переменной x. Здесь $u(t,x)$ – скалярная функция, определенная при $t \geq t_0$, $0 \leq x \leq 1$, ε – положительный малый параметр, $a > 0$, $f(u,v)$ — скалярная функция из C^∞, порядка малости в нуле выше первого.

Как известно, цепочки и решетки связанных генераторов с сосредоточенными параметрами являются полезными физически содержательными моделями, позволяющими выяснить ряд закономерностей развития пространственно-временного хаоса в сплошных средах[3]. При этом, как правило, в качестве отдельно взятого звена цепочки (парциальной системы) рассматривается генератор, описывающийся системой обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным устойчивым циклом. Однако в случае волновых уравнений для того, чтобы добиться требуемого эффекта, вовсе не обязательно брать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно делается в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством. В связи с этим представляет интерес цепочка, составленная из трех однонаправленно связанных уравнений (1) вида

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j + \varepsilon\alpha u_{j-1} = a^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + f(u_j, \frac{\partial u_j}{\partial t}),\ j = 1,2,3,\ u_0 = u_3, \quad (2)$$

с краевыми условиями Дирихле или Неймана. Здесь величина $\varepsilon\alpha$ характеризует слабую связь между генераторами.

Цель работы

Основной целью данной диссертационной работы является изучение динамических свойств нелинейных краевых задач (1) в различных постановках и с различными нелинейностями $f(u,v)$, а также систем (2) связанных в кольцо осцилляторов такого типа. Особое внимание уделяется условиям возникновения явления буферности в этих задачах.

Методы исследования

Методом решения бифуркационных задач с бесконечномерным вырождением является метод квазинормальных форм, впервые предложенный в работе Ю.С. Колесова [4] для уравнений параболического типа с малой диффузией, а затем обоснованный и распространенный на уравнения гиперболического типа и на сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с запаздыванием (С. А. Кащенко[5], А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов[6]). Следует отметить,

[3] *Анищенко, В.С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.

[4] *Колесов Ю.С.* Метод квазилинейных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. матем. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 28 - 34.

[5] *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. — 1989. — Т.25, № 2. — С. 262 – 270.

[6] *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений — М., 2004.

что, в отличие от метода нормальных форм, этот метод не позволяет автоматически распространять свойства решений квазинормальной формы на решения исходной задачи. Для обоснования такого соответствия необходимо оценивать невязку асимптотического приближения решения, полученного на основе грубых устойчивых режимов нормализованной системы.

Научная новизна работы

В диссертационной работе предложено решение нескольких бифуркационных задач для уравнений и систем уравнений гиперболического типа. Найдены условия возникновения в этих задачах явления буферности.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказано существование и устойчивость двухмодового цикла телеграфного уравнения с малым параметром при квадратичной нелинейности при наличии внутреннего резонанса 1:2.

2. Исследована система трех нелинейных телеграфных уравнений с малой однонаправленной связью, получены условия существования и устойчивости циклов системы; в рамках задачи продемонстрировано явление буферности.

3. Показано наличие буферности в системе трех однонаправленно связанных нелинейных волновых уравнений без квадратичной нелинейности.

4. Создан программный комплекс численного анализа динамических систем Tracer3.

5. Обоснован метод динамической перенормировки определения старшего ляпуновского показателя для отображений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Ее основные результаты могут быть использованы для анализа систем нелинейных волновых уравнений. Представленный в последней части работы программный продукт (Tracer3) может найти и находит применение в качестве иллюстративного материала в учебном процессе и в качестве исследовательского инструмента при численном анализе инвариантных числовых характеристик динамических систем. Программный пакет Tracer3 доступен на сайте `http://www.tracer3.narod.ru`.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XXVII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, 2005;

2. XXVIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, 2006 (В рамках общеуниверситетской конференции молодых ученых «Ломоносов-2006».);

3. VIII Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2006), Крым, Алушта, 2006.

Кроме того, результаты диссертации были изложены на ряде заседаний семинара кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова «Нелинейная динамика и синергетика», а также обсуждались в семинаре «Моделирование и исследование нейронных сетей» кафедры компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 8 работ: 5 статей и 3 тезисов докладов. Из работ, выполненных совместно, в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 52 наименования. Диссертация содержит 13 рисунков и одно приложение. Общий объем диссертации составляет 96 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проведенного исследования, приводятся его цели и задачи. Кроме того, в нем содержится обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, а также приводится структура работы.

Первая глава посвящена проблеме бифуркаций периодических решений нелинейного телеграфного уравнения с нулевыми граничными условиями Дирихле в критическом случае $a = a_{nk} = \sqrt{3/((2k+1)^2 - 4n^2)}$.

1. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{gathered} u_{tt} + u = a^2 u_{xx} + (\mu u - u^2) u_t, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где μ — малый параметр, фазовым пространством для $(u(t,x), u_t(t,x))$ считаем $\mathring{W}_2^2 \times \mathring{W}_2^1$, где $\mathring{W}_2^i$ — соболевские пространства функций с нулевыми граничными условиями из (3).

Линеаризуем уравнение из (3) при $\mu = 0$. Полученная задача допускает решения вида $u(t,x) = e^{\pm i\omega_n t}\sin(nx)$, с частотами $\omega_n = \sqrt{1+a^2n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Допустим, что для некоторого $k \geq n$ имеет место резонанс

$$2\omega_n = \omega_{2k+1}, \tag{4}$$

то есть $a = a_{nk} = \sqrt{3/((2k+1)^2 - 4n^2)}$.

Требуется найти при данном условии приближение цикла задачи (3), бифурцирующего из нулевого решения на модах $\sin nx$ и $\sin(2k+1)x$.

2. Алгоритмическая часть.

Произведем в задаче (3) подстановку

$$u = \mu u_1(t,\tau,x) + \mu^3 u_2(t,\tau,x) + \ldots, \qquad \tau = \mu^2 t, \tag{5}$$

где u_1 задается выражением

$$u_1(t,\tau,x) = (e^{i\omega_n t}z_1(\tau) + e^{-i\omega_n t}\bar{z}_1(\tau))\sin nx + (e^{2i\omega_n t}z_2(\tau) + e^{-2i\omega_n t}\bar{z}_2(\tau))\sin(2k+1)x.$$

Приравнивая коэффициенты при μ^3, получим задачу на u_2:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_2 - a_{nk}^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial\tau} + (u_1 - u_1^2)\frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad u_2\big|_{x=0} = u_2\big|_{x=\pi} = 0. \tag{6}$$

Искать решение u_2 будем в виде, аналогичном виду неоднородности в уравнении (6):

$$u_2 = \sum_{s=1}^{6}(B_s(\tau,x)e^{sti\omega_n} + \bar{B}_s(\tau,x)e^{-sti\omega_n}). \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), мы получим шесть краевых задач:

$$\begin{gathered}(1 - s^2\omega_n^2)B_s(\tau,x) - a_{nk}^2 B_{s\ xx}(\tau,x) = \gamma_s(\tau,x),\\ B_s(\tau,0) = B_s(\tau,\pi) = 0, \quad 1 \leq s \leq 6.\end{gathered} \tag{8}$$

При $s = 1, 2$ задачи всегда вырождены: у соответствующих им однородных существуют нетривиальные решения $\sin nx$ и $\sin(2k+1)x$ соответственно. Условия их разрешимости

$$\int_0^\pi \gamma_1(\tau,x)\sin nx\ dx = 0, \quad \int_0^\pi \gamma_2(\tau,x)\sin(2k+1)x\ dx = 0$$

дают систему уравнений на $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$:

$$\begin{gathered}z_1' + \lambda z_2\bar{z}_1 + z_1z_2\bar{z}_2/4 + 3z_1^2\bar{z}_1/16 = 0,\\ z_2' + z_1z_2\bar{z}_1/4 + z_2^2\bar{z}_2/8 + \lambda z_1^2/8 = 0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $\lambda = 4n^2/(\pi(1+2k)(1+2k+2n)(1+2k-2n))$.

Задачи при $s = 5, 6$ заведомо разрешимы, случаи $s = 3, 4$ отличаются от указанных выше присутствием в правой части квадратичных слагаемых, и в случае вырожденности условие разрешимости для них не может быть выполнено, поэтому необходимо исключить ситуацию, когда числа $\sqrt{(9\omega_n - 1)/a_{nk}^2}$ и $\sqrt{(16\omega_n - 1)/a_{nk}^2}$ являются целыми. Можно записать эти условия так:

$$3\omega_n \neq \omega_r, \quad 4\omega_n \neq \omega_r. \tag{10}$$

У системы (9) существует устойчивое постоянное решение:

$$z_1 = \rho_1^0 e^{i\varphi_0}, \quad z_2 = -\rho_2^0 e^{2i\varphi_0},$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, $\rho_1^0 = 8\lambda\sqrt{2\sqrt{61} - 13}/(5\sqrt{3})$, $\rho_2^0 = 2\lambda(9 - \sqrt{61})/5$.

Теперь, считая, что все условия разрешимости выполнены, мы можем легко найти решения краевых задач (8). Отметим, что u_2 является ограниченной функцией; ее явный вид в дальнейшем не понадобится.

Таким образом, для исходной задачи (3), обладающей резонансом (4), при условии (10) мы получили первое приближение цикла. Поскольку параметр φ_0 отвечает за сдвиг по циклу, в дальнейшем будем считать его равным нулю.

3. Линейный анализ устойчивости. Линеаризуем на решении (5) задачу (3):

$$\begin{gathered} h_{tt} + h - a_{n,k}^2 h_{xx} = \mu^2(a_1(t,x)h + a_2(t,x)h_t), \quad h\big|_{x=0} = h\big|_{x=\pi} = 0, \\ a_1(t,x) = \sum_{-3\le s\le 3,\ s\neq 0} \zeta_s^{(1)}(t,x)e^{sti\omega_n}, \quad a_2(t,x) = \sum_{s=-3}^{3} \zeta_s^{(2)}(t,x)e^{sti\omega_n}. \end{gathered} \tag{11}$$

Расчет характеристических показателей, отвечающих за устойчивость цикла, будем производить стандартным образом. Вначале найдем характеристические показатели для мод, частоты которых находятся в резонансном соотношении (4). Сделаем замену

$$h = (V_0 + \mu^2 V_1)\exp(\mu^2 Dt).$$

Здесь V_1, V_2 и D - соответственно вектор-строки и матрица размерности 4:

$$\begin{aligned} V_0 = (&\exp(i\omega_n t)\sin nx,\ \exp(-i\omega_n t)\sin nx, \\ &\exp(2i\omega_n t)\sin(2k+1)x,\ \exp(-2i\omega_n t)\sin(2k+1)x), \\ V_1 = (&b_1(t,x),\, \bar{b}_1(t,x),\, b_2(t,x),\, \bar{b}_2(t,x)), \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} \\ \bar{d}_{1,2} & \bar{d}_{1,1} & \bar{d}_{1,4} & \bar{d}_{1,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} \\ \bar{d}_{3,2} & \bar{d}_{3,1} & \bar{d}_{3,4} & \bar{d}_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (11), и приравняем в первой и третьей компонентах вектора коэффициенты при μ^2; в результате получим задачи на b_1 и b_2. Как обычно, решения ищем в виде, который имеют их правые части:

$$b_1(t,x) = \sum_{\substack{-3\le s\le 5\\ s\ne 0}} \exp(si\omega_n t) B_s^{(1)}(x),\ b_2(t,x) = \sum_{\substack{-2\le s\le 6\\ s\ne 0}} \exp(si\omega_n t) B_s^{(2)}(x),$$

в результате чего получим 16 краевых задач вида:

$$\begin{aligned} &(1-s^2\omega_n^2)B_s^{(1)}(x) - a_{n,k}^2 B_s^{(1)}(x) = i\omega_n\gamma_s^{(1)}(x), \quad -3\le s\le 5,\ s\ne 0,\\ &(1-s^2\omega_n^2)B_s^{(2)}(x) - a_{n,k}^2 B_s^{(2)}(x) = i\omega_n\gamma_s^{(2)}(x), \quad -2\le s\le 6,\ s\ne 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из условий разрешимости этих задач при $s = -2,-1,1,2$ можно найти значения всех элементов первого и третьего столбцов матрицы D, которыми она однозначно определяется. Среди собственных чисел этой матрицы одно равно нулю, и три — отрицательны.

Отметим, что в силу условий (10) остальные задачи (12) также разрешимы. Задачи на $B_5^{(1)}$ и $B_5^{(2)}$ отличаются от задачи на слагаемое B_5, входящее в u_2, лишь коэффициентом при неоднородности. То же справедливо и для задач $B_6^{(1)}$, $B_6^{(2)}$ и B_6.

На прочих модах ($\sin mx,\ m\ne n,\ m\ne 2k+1$) расчет показателей будем производить в одночастотном виде, для чего сделаем в (11) следующую замену:

$$h = (\sin mx + \mu^2\sigma_m(t,x))\exp((i\omega_m + \mu^2\nu_m)t).$$

Приравняв коэффициенты при μ^2, получим задачу на σ_m:

$$\begin{aligned} \sigma_{m\,tt}(t,x) + 2i\omega_m\sigma_{m\,t}(t,x) + (1-\omega_m^2)\sigma_m(t,x) - a_{n,k}^2\sigma_{m\,xx}(t,x) &=\\ = \sin mx(a_1(t,x) + i\omega_m a_2(t,x) - 2i\omega_m\nu_m)&,\\ \sigma_m(t,0) = \sigma_m(t,\pi) = 0&. \end{aligned}$$

Представляя σ_m в виде $\sigma_m = \sum\limits_{s=-4}^{4} B_s^m(x)\exp(si\omega_n t)$, разбиваем задачу на девять, условия их разрешимости при $s=0$ дадут для ν_m выражение: $\nu_m = -(\rho_1+\rho_2)/2,\ \ m\ne n,\ m\ne 2k+1$, а для остальных s превратятся в условия нерезонансности следующего вида:

$$\omega_m \pm s\omega_n \ne \omega_p, \quad -4\le s\le 4,\ s\ne 0. \tag{13}$$

Итак, все полученные характеристические показатели отрицательны, кроме одного нулевого. Проделанные выкладки позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), (10), (13). *Тогда существует* $\mu_0 > 0$, *такое что при всех* $0 < \mu \le \mu_0$ *краевая задача* (3) *имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с асимптотикой* (5).

Во **второй** главе построена асимптотика периодического решения системы трех нелинейных телеграфных уравнений и показано существование и устойчивость решений системы с данной асимптотикой. Также продемонстрирована реализация в рамках задачи явления буферности.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу, представляющую собой систему трех осцилляторов с малой связью и краевыми условиями Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j + \varepsilon \alpha u_{j-1} = a^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + (b u_j - u_j^2) \frac{\partial u_j}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $j = 1, 2, 3$, $u_0 = u_3$, $\alpha > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Фазовым пространством для $(u_j(t,x), \frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t})$ считаем $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^2(0,\pi) \times \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(0,\pi)$, где $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^i(0,\pi)$ — соболевские пространства функций с нулевыми граничными условиями из (14).

Линеаризуем в нуле уравнение из (14) при $\varepsilon = 0$. Полученная задача допускает решения вида $u(t,x) = e^{\pm i\omega_n t}\cos(nx)$, с частотами $\omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

В первую очередь построим приближение цикла задачи (14), бифурцирующего из нулевого решения на модах $(1,0,0)^T\cos(nx)$, $(0,1,0)^T\cos(nx)$, $(0,0,1)^T\cos(nx)$ для некоторого фиксированного n, а затем покажем его существование и устойчивость.

Алгоритмическая часть. Выполним в (14) подстановку

$$\begin{aligned} u_j(t,x) = \varepsilon^{1/2} u_{j,1}(t,\tau,x) + \varepsilon u_{j,2}(t,\tau,x) + \varepsilon^{3/2} u_{j,3}(t,\tau,x) + \\ + \varepsilon^2 u_{j,4}(t,\tau,x) + o(\varepsilon^2), \quad \tau = \varepsilon t, \\ u_{j,1} = (z_j(\tau) e^{i\omega_n t} + \bar{z}_j(\tau) e^{-i\omega_n t})\cos(nx), \end{aligned} \tag{15}$$

и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях ε. При $\varepsilon^{1/2}$ получаем верное равенство, при ε имеем систему из трех несвязанных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} + u_{j,2} - a^2 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} = i\omega_n b (z_j^2(\tau) e^{2i\omega_n t} - \bar{z}_j^2(\tau) e^{-2i\omega_n t}) \cos^2(nx), \\ \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение будем искать в виде, какой имеет правая часть уравнения (16):

$$u_{j,2}(t,\tau,x) = A_j(x)z_j^2(\tau)e^{2i\omega_n t} + \bar{A}_j(x)\bar{z}_j^2(\tau)e^{-2i\omega_n t}.$$

Задача на $A_j(x)$ вырождена, если для некоторого натурального $m > 2n$ выполнено $2\omega_n = \omega_m$, или, что то же самое: $a = \sqrt{3/(m^2-4n^2)}$. В случае невырожденности решение единственно, в противном случае решения также существуют.

На следующем шаге проявляется влияние связи осцилляторов. Приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} + u_{j,3} - a^2\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} = -\alpha u_{j-1,1} - 2\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial\tau\partial t} - \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + \\ +b(u_{j,2}\frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + u_{j,1}\frac{\partial u_{j,2}}{\partial t}) - u_{j,1}^2\frac{\partial u_{j,1}}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0.\end{aligned}$$

Правая часть представляет собой линейную комбинацию первой и третьей гармоник по t, поэтому решение ищем в виде

$$u_{j,3} = B(\tau,x)e^{i\omega_n t} + C(\tau,x)e^{3i\omega_n t} + \bar{B}(\tau,x)e^{-i\omega_n t} + \bar{C}(\tau,x)e^{-3i\omega_n t}.$$

Полученная таким образом задача на B всегда вырождена, соответствующее условие разрешимости дает систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{z}_j = -\frac{z_j}{2} + i\lambda z_{j-1} - (\frac{3}{8} + i\Omega)z_j^2\bar{z}_j, \quad j = 1,2,3, \quad z_0 = z_3, \tag{17}$$

где $\lambda = \alpha/(2\omega_n)$, $\Omega = b^2\omega_n(4\omega_n^2+5)/(24(\omega_n^2-1))$. Можно найти решение уравнения (17) в виде автомодельного цикла:

$$z_j(\tau) = \rho e^{i\phi\tau + 2\pi i(j-1)/3}, \tag{18}$$

которое существует при $\lambda > 1/\sqrt{3}$, и устойчивость которого гарантируется неравенством:

$$\Omega \le l(\lambda) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2(\sqrt{3}-3\lambda)} + \frac{3}{4\lambda} + \frac{(15\lambda-2\sqrt{3})\sqrt{3-18\sqrt{3}\lambda+69\lambda^2}}{8(\sqrt{3}\lambda-1)\lambda}. \tag{19}$$

Задача на C разрешима всегда. Наконец, задача на u_4 имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{j,4}}{\partial t^2} + u_{j,4} - a^2\frac{\partial^2 u_{j,4}}{\partial x^2} = -2\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t\partial\tau} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial t} - \alpha u_{j-1,2} + bu_{j,2}\frac{\partial u_{j,2}}{\partial t} + \\ +bu_{j,1}\frac{\partial u_{j,3}}{\partial t} + bu_{j,3}\frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + bu_{j,1}\frac{\partial u_{j,1}}{\partial\tau} - 2u_{j,1}u_{j,2}\frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} - u_{j,1}^2\frac{\partial u_{j,2}}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_{j,4}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_{j,4}}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0.\end{aligned}$$

Разрешимость этой задачи гарантируется условием

$$a^2 \neq 1/(2n)^2. \tag{20}$$

Таким образом, считая выполненным условие (20) и подставив в (15) выражения для $u_{j,2}$, $u_{j,3}$, $u_{j,4}$, учитывая (18), мы можем построить приближенное (с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке) периодическое решение задачи (14).

Линейный анализ . Линеаризуем на построенном приближении цикла систему уравнений из (14), получим:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + h - a^2 \frac{\partial^h}{\partial x^2} = \sqrt{\varepsilon}\Big(A_1 h + A_2 \frac{\partial h}{\partial t}\Big) + \varepsilon\Big(- A_3 h + B_1 h + B_2 \frac{\partial h}{\partial t}\Big),$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0.$$

Здесь $h = (h_1, h_2, h_3)^T$, A_1, A_2, B_1, B_2 — диагональные матрицы с периодическими по t, τ элементами, а матрица A_3 имеет вид $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. У данной задачи вычислим характеристические показатели следующим образом: для расчета показателей, отвечающих генерируемым модам, произведем подстановку

$$h = (V_0(t,\tau,x) + \sqrt{\varepsilon}V_1(t,\tau,x) + \varepsilon V_2(t,\tau,x))\exp(\varepsilon D t),$$
$$V_0 = \begin{pmatrix} w_0 & \bar{w}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & \bar{w}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_0 & \bar{w}_0 \end{pmatrix}, \quad w_0 = e^{i(\omega_n t + \phi\tau)}\cos(nx),$$

где V_1, V_2 и D — матрицы размера 3 на 6 и 6 на 6 соответственно, элементы которых подлежат определению. Приравнивая одинаковые степени ε, получим набор задач для определения V_1 и V_2, а из условий разрешимости задач для элементов V_2 однозначно определяется матрица D. Среди собственных чисел матрицы D имеется одно нулевое, а все действительные части оставшихся собственных значений отрицательны в области значений параметров $\lambda > 1/\sqrt{3}$, $\Omega < l(\lambda)$.

Расчет показателей, соответствующих модам $\cos(mx)$, $m = 1, 2, \ldots$, $m \neq n$ произведем в одночастотном виде: подставим в (11) следующее выражение:

$$h = e^{i\omega_m t}(\cos(mx)I + \sqrt{\varepsilon}V_{1,m}(t,\tau,x) + \varepsilon V_{2,m}(t,\tau,x))\exp(\varepsilon D_m t),$$

в котором I — единичная, а $V_{1,m}$, $V_{2,m}$, D_m — подлежащие определению матрицы размером 3 на 3. После приравнивания соответствующих степеней ε условия разрешимости соответствующих задач для элементов $V_{1,m}$ приводят к неравенствам вида $(\omega_m \pm \omega_n)^2 - \omega_{m\pm n}^2 \neq 0$, справедливость которых проверяется непосредственно. Из условий разрешимости задач на $V_{2,m}$ определяются элементы матриц D_m, действительные части собственных значений которых отрицательны при одновременном выполнении двух условий: во-первых,

$$a^2 < \frac{5}{3n^2 - 8} \tag{21}$$

а во-вторых, для любого m

$$\alpha > \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3\omega_n} - \frac{1}{4\omega_m} \right)^{-1}. \tag{22}$$

Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (19), (20), (21), (22). *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое что задача* (14) *при любом* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с асимптотикой* (15), (18).

Буферность в рамках задачи (14) реализуется следующим образом: по любому натуральному числу n_0 мы можем подобрать,

— во-первых, достаточно большое α — такое, что $\forall n \leq n_0$ выполняется условие существования автомодельного цикла квазинормальной формы (17):
$$\lambda = \alpha / 2\omega_n > 1/\sqrt{3},$$
и также $\forall n \leq n_0$ выполняется одно из условий отрицательности собственных чисел матриц D_m (22);

— во-вторых, достаточно малое a позволяет добиться выполнения второго условия отрицательности собственных чисел матриц D_m (21) для всех $n \leq n_0$.

— в третьих, учитывая выбранное a, уменьшением параметра b мы можем удовлетворить неравенству (19), сделав устойчивым автомодельный цикл при $\forall n \leq n_0$;

Таким образом, для любого наперед заданного числа циклов n_0 можно выбрать параметры так, что, применив соответствующее число раз Теорему 2 и, выбрав наименьшее среди всех доставляемых Теоремой 2 значений ε_0, мы получим, что все циклы задачи (14) для $\forall n \leq n_0$ будут существовать и являться устойчивыми.

В **третьей** главе изучается буферность в системе трех однонаправленно связанных осцилляторов без квадратичной нелинейности.

Рассмотрим краевую задачу, представляющую собой систему трех осцилляторов с малой однонаправленной связью и краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + u_j + \varepsilon u_{j-1} = a^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - b u_j^3 - u_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad u_j|_{x=0} = u_j|_{x=\pi} = 0, \tag{23}$$

где $j = 1, 2, 3$, $u_0 = u_3$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $a, b = \text{const} > 0$. Фазовым пространством для $(u_j(t,x), \frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t})$ считаем $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^2(0,\pi) \times \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(0,\pi)$, где $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^i(0,\pi)$ — соболевские пространства функций с нулевыми граничными условиями из (23). Исследуем существование и устойчивость периодических решений, бифурцирующих из нулевого состояния равновесия при $\varepsilon > 0$, методом квазинормальных форм. Линеаризуем в нуле уравнение из (23) при $\varepsilon = 0$. Полученная задача допускает решения вида $u_j(t,x) = e^{\pm i\omega_n t}\sin(nx)$, с частотами $\omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Выполним в (23) подстановку

$$\begin{gathered} u_j(t,x) = \varepsilon^{1/2} u_{j,1}(t,\tau,x) + \varepsilon^{3/2} u_{j,2}(t,\tau,x), \quad \tau = \varepsilon t, \\ u_{j,1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(z_j^k(\tau) e^{i\omega_k t} + \bar{z}_j^k(\tau) e^{-i\omega_k t} \right) \sin(kx). \end{gathered} \tag{24}$$

Условие разрешимости краевой задачи при $\varepsilon^{3/2}$ даст квазинормальную форму

$$\dot{z}_j^n = \frac{i}{2\omega_n} z_{j-1}^n + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3ib}{2\omega_n} \right) \left(\frac{3}{4} |z_j^n|^2 + \sum_{k=1,\, k\neq n}^{\infty} |z_j^k|^2 \right) z_j^n, \tag{25}$$

где $j = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2 \ldots.$

Как известно, в общем случае автомодельным циклам системы (25) с конечным числом ненулевых компонент, то есть решениям вида $z_j^n = \xi_j e^{i\phi\tau}$, $n = n_1, n_2, \ldots n_s$, соответствуют торы исходной системы (23) с теми же свойствами устойчивости. При $s = 1$ условия, обеспечивающие устойчивость инвариантного цикла задачи (23), можно получить в явном виде.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* $(b^2 c_0^2 - 1)/n^2 < a^2 < 7/(9n^2 - 16)$, *где* $c_0 = \text{const} > 0$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое что задача* (23) *при любом* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с асимптотикой* (24), *где* $z_j^k = 0,\ k \neq n$.

Отметим, что при подходящем выборе параметра b, можно путем согласованного уменьшения параметров a и ε_0 добиться устойчивости сколь угодно большого числа циклов задачи (23), то есть в данном случае также реализуется явление буферности.

В последней части главы 3 рассмотрены динамические свойства системы (25). Аналитическими методами нетрудно показать, что от орбитально экспоненциально устойчивого автомодельного цикла системы (25) при нарушении условия $(b^2 c_0^2 - 1)/n^2 < a^2$ мягко ответвляется орбитально экспоненциально устойчивый тор (бифуркация Андронова - Хопфа). Дальнейшее изменение параметров системы (25) приводит к усложнению ее колебательных режимов и возникновению нерегулярных колебаний. Для установления данного факта использовались численные методы, в частности, с помощью созданного автором программного комплекса Tracer3, различными методами вычислялись ляпуновские показатели траекторий системы (25). Появление в спектре показателей положительной величины считается эвристическим признаком возникновения хаоса в динамической системе.

Заметим, что в отличие от циклов и торов различной размерности для подобных нерегулярных режимов не существует методов обоснования соответствия между решениями системы (25) и задачи (23), и наличие сложного поведения у исходной задачи (23) остается в рамках гипотез.

В **четвертой** главе описан программный комплекс Tracer3, его функции и возможности, приведено обоснование метода динамической перенормировки вычисления старшего ляпуновского показателя.

В общем виде рассматриваемые динамические системы со своими линеаризованными системами выглядят так:

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,\ x_0 = w\,, \quad x_n \in R^m,\ f \in C^1, \tag{26}$$

$$u_{n+1} = f'(x)\big|_{x=x_n} \cdot u_n\,, \quad u_0 = w\,,\ \|w\| = 1, \tag{27}$$

для отображений, и

$$x' = g(x)\,,\ x(0) = w\,, \quad x \in R^m,\ g \in C^1, \tag{28}$$

$$u' = g'(x)\big|_{x=x(t)} \cdot u\,, \quad u(0) = v\,,\ \|v\| = 1, \tag{29}$$

для систем дифференциальных уравнений.

По определению, показателем Ляпунова траектории x_n (или решения $x(t)$) является значение следующего верхнего предела:

$$\lambda(u_n) = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \frac{1}{n} \ln \|u_n\|\,. \tag{30}$$

$$\lambda(u(t)) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \frac{1}{t} \ln \|u(t)\|\,. \tag{31}$$

Метод Бенеттина. Непосредственное вычисление показателя по формулам (30), (31) затруднено экспоненциальным изменением решения системы (27) при $\lambda_{max} \neq 0$, которое влечет за собой неизбежное переполнение любых числовых типов. Самый известный алгоритм преодоления этой сложности был предложен Бенеттином. Он состоит в перенормировке решения системы (27) через каждые N итераций.

Неудобство алгоритма Бенеттина заключается в том, что в общем случае для разных систем следует выбирать разное N, причем критерий этого выбора плохо формализуем: требуется, чтобы за N итераций норма решения u_n не изменилась «слишком сильно».

Метод динамической перенормировки. Предложенный в [1] метод динамической перенормировки лишен упомянутого в предыдущем пункте недостатка; применительно к отображениям он заключается в следующем (данный результат изложен в [6]): фиксируем два числа $u_{max} > 1$ и $u_{min} \in (0, 1)$. Далее, в цикле по $m \geq 1$ будем параллельно вычислять очередные итерации систем (26) и (27) до тех пор, пока $\|u_n\|$ не выйдет за пределы отрезка $[u_{min}\,, u_{max}]$, а когда это произойдет (обозначим такой номер n за k_m), нормируем решение системы (27).

Итак, при каждом m вместе с (26) решается следующая система:

$$
\begin{aligned}
&u_{n+1}^{(m)} = f'(x)|_{x=x_n} \cdot u_n^{(m)}\,, \\
&u_{k_{m-1}}^{(m)} = \frac{u_{k_{m-1}}^{(m-1)}}{\|u_{k_{m-1}}^{(m-1)}\|}\,,\ k_{m-1} \leq n \leq k_m\,.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Здесь для унификации обозначений $k_0 = 0$, и при $m = 1$ система просто совпадает с (27). Обозначим $m(n)$ количество перенормировок, произведенных до n-й итерации включительно и отметим, что для дальнейших рассуждений безразлично, будет ли оно конечно или будет неограниченно возрастать с ростом n.

Теорема 4. *Справедливо следующее равенство:*

$$
\lambda_{max} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m(n)} \ln \|u_{k_i}^{(i)}\|\,. \tag{33}
$$

Доказательство. Из формулы (30) получаем асимптотику для нормы решения системы (27) следующего вида:

$$
\|u_n\| = \exp\big(\lambda_{max} \cdot n + \alpha(n)\big)\,,\ \alpha(n) = o(n) \text{ при } n \to \infty\,. \tag{34}
$$

Предположим вначале, что $\lambda_{max} \neq 0$. В силу (34) норма решения u_n либо неограниченно растет, либо стремится к нулю. Отсюда вытекает, что при $n \to \infty$ также к бесконечности стремятся величины $m(n)$ и $k_{m(n)}$ — наибольший номер итерации, не превосходящий n, при котором произошла перенормировка.

Из линейности системы (27) вытекает представление

$$
\|u_{k_{m(n)}}\| = \prod_{i=1}^{m(n)} \|u_{k_i}^{(i)}\|\,. \tag{35}
$$

Подставим в (34) $n = k_{m(n)}$ и приравняем (34) и (35):

$$\exp\left(\lambda_{max}\cdot k_{m(n)} + \alpha(k_{m(n)})\right) = \prod_{i=1}^{m(n)} \|u_{k_i}^{(i)}\|\,,$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{k_{m(n)}}\sum_{i=1}^{m(n)} \ln\|u_{k_i}^{(i)}\| - \frac{\alpha(k_{m(n)})}{k_{m(n)}}\,. \tag{36}$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} n/k_{m(n)} = 1$. Это следует из очевидного неравенства $k_{m(n)} \le n < k_{m(n)+1}$. Поделим его на $k_{m(n)}$ и устремим n к бесконечности. Получим:

$$1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{k_{m(n)}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{k_{m(n)+1}}{k_{m(n)}} = 1\,.$$

Последнее равенство легко получить, выразив $k_{m(n)}$ из (36). Наконец, перейдем в (36) к пределу при $n\to\infty$:

$$\lambda_{max} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m(n)} \ln\|u_{k_i}^{(i)}\| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{k_{m(n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m(n)} \ln\|u_{k_i}^{(i)}\|\,.$$

Теперь вернемся к случаю $\lambda_{max} = 0$, при котором возможно конечное количество перенормировок (если оно неограниченно, проведенные выше рассуждения полностью повторяются). Но если $m(n) = m_0$ при всех $n > n_0$, то равенство (33) заведомо сохраняется, так как сумма в нем становится ограниченной. Утверждение доказано.

Вычисления можно производить, отбросив знак предела в (33), либо, в случае заведомо бесконечного количества перенормировок, по асимптотической формуле (36).

В **заключении** подводятся основные итоги работы, а также намечаются возможные пути продолжения исследования.

В **приложении** представлены ключевые выдержки из кода программы Tracer3, написанного на языке Object Pascal: процедура run-time компиляции в памяти машинного кода вычисляемых функций, процедура вычисления спектра ляпуновских показателей методом динамической перенормировки. Также в приложение включены вспомогательные процедуры пакета символьных вычислений Mathematica.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих научных журналах, включенных в перечень ВАК:

[1] Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора /*Д. С. Глызин.* [и др.] // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 268-273.

Другие публикации:

[2] *Глызин, Д. С.* Вычисление старшего ляпуновского показателя отображений усовершенствованным методом / *Д. С. Глызин* // XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2004. С. 37 – 38.

[3] *Глызин, Д. С.* Метод динамической перенормировки вычисления ляпуновских показателей разностных уравнений / *Д. С. Глызин* // Современные проблемы математики и информатики: Сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005. — Вып. 6. — С. 38 – 46.

[4] *Глызин, Д. С.* Метод динамической перенормировки вычисления старшего ляпуновского показателя отображений / *Д. С. Глызин* // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Т.1. — М.: МГУ, 2004. — С. 60 – 63.

[5] *Глызин, Д. С.* Пространственно-неоднородные циклы одной краевой задачи в критическом случае / *Д. С. Глызин* // Современные проблемы математики и информати-ки: Сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005. — Вып. 7. — С. 131 – 134.

[6] *Глызин, Д. С.* Пространственно неоднородные циклы одной краевой задачи в критическом случае / *Д. С. Глызин* // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — М.: МГУ, 2005. — С. 34.

[7] *Глызин, Д. С.* Существование и устойчивость двухмодовых резонансных циклов нелинейного телеграфного уравнения / *Д. С. Глызин* // Современные проблемы математики и информати-ки: Сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2006. — Вып. 8. — С. 73 – 82.

[8] *Глызин, Д. С.* Периодические решения системы трех связанных нелинейных телеграфных уравнений /*Д. С. Глызин* // VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. – Симферополь: ДиАйПи, 2006. — С. 49.

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.