На правах рукописи

ТОЛКАЧЕВА Елена Алексеевна

АППРОКСИМАЦИЯ ТРЕХОСНОВНЫХ ПОЛУГРУППОВЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ АЛГЕБР

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ярославль

2006

Работа выполнена на кафедре алгебры Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена

Научные руководители: кандидат физико-математических наук, профессор Лесохин Михаил Моисеевич

кандидат физико-математических наук, профессор Евсеев Александр Евгеньевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Кублановский Станислав Ицхокович

доктор физико-математических наук, профессор Баранский Виталий Анатольевич

Ведущая организация – Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Защита состоится «___» __________ 2006 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова. Адрес: г. Ярославль, ул. Союзная 144.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ЯрГУ им. П. Г. Демидова.

Автореферат разослан «__» ________2006 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Аппроксимация – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близким к исходным, – является одним из основных методов математики. Этот метод позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объектов, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). В математическом анализе, в геометрии, в теории чисел применяются методы аппроксимации различных объектов, а такие разделы математики, как теория приближения функций, численные методы анализа, по существу, целиком посвящены аппроксимации.

Широкое применение аппроксимационных методов в алгебре связано с именем академика А. И. Мальцева, который сформулировал [1] общее понятие аппроксимации алгебраических систем относительно предикатов и показал связь финитной аппроксимируемости алгебраической системы относительно предиката с алгоритмической разрешимостью проблемы этого предиката в рассматриваемой системе. С тех пор появилось большое количество работ, посвященных аппроксимации алгебраических систем различных классов, прежде всего групп, колец и алгебр. Этим вопросам посвящены работы как отечественных (А. И. Мальцев, М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков, Ю. М. Рябухин и др.), так и зарубежных (К. Гирш, Ф. Гроувз, Ф. Холл, Н. Блекберн и др.) авторов. Аппроксимация полугрупп относительно предикатов также привлекла внимание многих исследователей и превратилась сейчас в обширную и интенсивно развивающуюся область теории полугрупп. Именно ей посвящены работы М. М. Лесохина, С. И. Кублановского, С. Г. Мамиконяна, Э. А. Голубова, М. В. Сапира, Ст. Шварца, Э. Хьюитта, Г. Цукермана, Э. П. Арояна и других алгебраистов.

В настоящее время получили распространение многоосновные алгебры, начало изучения которых в общем виде было положено Б. И. Плоткиным [2].

В многоосновных алгебрах несколько основных множеств и, кроме алгебраических операций, определенных на этих множествах, допускаются операции дистрибутивного типа, связывающие элементы из различных основных множеств. В теории полугрупп рассмотрение многоосновных алгебр фактически начато Е. С. Ляпиным с изучения систем с внешним умножением, свойства которых более подробно были исследованы М. М. Лесохиным [3–7]. Системы с внешним умножением – это ни что иное, как трехосновные полугрупповые дистрибутивные алгебры. Вопросами, связанными с билинейными отображениями полугрупп, занимался А. В. Попырин, который нашел [10] условия невырожденности билинейных отображений полугрупп, то есть условия существования невырожденной алгебры с тремя совпадающими компонентами.

Если A, B, C – произвольные полугруппы, а $f{:}A\times B\to C$ – отображение, для которого $f(a_1\cdot a_2,b) = f(a_1,b)\cdot f(a_2,b)$, $f(a,b_1\cdot b_2) = f(a,b_1)\cdot f(a,b_2)$, для любых $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$. Тогда тройку полугрупп A, B, C вместе с отображением f будем называть трехосновной полугрупповой дистрибутивной алгеброй (алгеброй) и обозначать (A, B, C, f).

Существуют классические примеры объектов, которые могут рассматриваться как трехосновные полугрупповые дистрибутивные алгебры. Например, предложенное в 1894 году Т. Стилтьесом обобщение понятия определенного интеграла. Пусть D – аддитивная полугруппа вещественных функций, интегрируемых и дифференцируемых на отрезке $[a,b]$, если интеграл Стилтьеса рассматривать как отображение $D\times D\to R$, построенное по правилу: $\forall u(x),v(x)\in D : I(u,v)=\int\limits_a^b u(x)dv(x)$, тогда система (D,D,R,I) является трехосновной полугрупповой дистрибутивной алгеброй.

Другим примером является полугрупповое обобщение тензорного произведения. Изучение тензорных произведений полугрупп было начато в прошлом веке, первые результаты в этом направлении были получены Т. Хедом (1967), П. Грийе (1969), Р. Фулпом (1970).

Гомоморфизмом алгебры (A_1,B_1,C_1,f_1) в алгебру (A_2,B_2,C_2,f_2) называется тройка $\mu=(\alpha,\beta,\gamma)$ гомоморфизмов $\alpha:A_1\to A_2$, $\beta:B_1\to B_2$, $\gamma:C_1\to C_2$, которая обладает свойством: $\gamma(f_1(a,b))=f_2(\alpha(a),\beta(b))$, для всех $a\in A_1$, $b\in B_1$.

Одним из важнейших производных объектов, связанных с какой-либо данной полугруппой, является полугруппа характеров с операцией поточечного умножения. Основоположником теории характеров полугрупп является Ст. Шварц, важнейшей составной частью этой теории являются работы Л. С. Понтрягина, А. Клиффорда, М. М. Лесохина, И. Хъюэтта, Х. Цукермана. Изучению строения полугруппы $Hom(A,K)$, где K – полугруппа, полученная внешним присоединением нуля к мультипликативной группе всех комплексных корней из единицы, посвящены работы Ст. Шварца [11–13]. Вопросам аппроксимации полугрупп комплексными характерами посвящены работы Хъюэтта и Цукермана, Лесохина, Попырина.

Рассматривая полугруппу обобщенных характеров коммутативной полугруппы M, мы получаем алгебру $(M,Hom(M,L),L,f_0)$, где L – некоторая полугруппа, $f_0(m,\chi)=\chi(m)$, для любых $m\in M$, $\chi\in Hom(M, L)$. М. М. Лесохиным [6] показано, что системы такого вида обладают свойством «правильности» по второй компоненте, то есть разные элементы второй компоненты осуществляют разные гомоморфизмы полугруппы M в полугруппу L, и, что путем отождествления элементов второй компоненты, которые осуществляют одинаковые гомоморфизмы, можно любую систему привести к системе правильной относительно этой компоненты. Если выполнено следующее условие: из того, что (A,B,C,f) правильна относительно B и является подсистемой системы (A,B',C,f), правильной относительно B', следует $B'=B$, то (A,B,C,f) называется полной. М. М. Лесохин [5] показал, что алгебра $(M,Hom(M,L),L,f_0)$ полна. В связи с такими «хорошими» свойствами этих алгебр, он в дальнейших работах изучал влияние полноты второй компоненты на свойства других компонент и алгебр в целом.

Классической алгеброй характеров называется [8] алгебра вида $(M,Hom(M,L),L,f_0)$, где M – произвольная коммутативная полугруппа, L – мультипликативная полугруппа поля, f_0 – каноническое билинейное отображение. Можно говорить о классических алгебрах различного вида, в зависимости от их третьей компоненты. Поскольку полугруппы характеров достаточно хорошо изучены, то представляет интерес аппроксимировать произвольные алгебры в классах алгебр характеров, в которых в качестве L будет выступать один из хорошо известных моноидов: мультипликативная полугруппа какого-либо числового поля или та или иная важнейшая числовая полугруппа (полугруппа корней из единицы с нулем, полугруппа неотрицательных вещественных чисел, мультипликативная полугруппа рациональных чисел и другие). Гомоморфизмы в алгебры такого вида называются характерами трехосновных полугрупповых алгебр. В зависимости от третьей компоненты можно говорить о характерах над полем, периодических комплексных характерах, положительных вещественных, аддитивных рациональных, расширенных характерах.

Пусть Φ – множество гомоморфизмов (A,B,C,f) в определенный класс алгебр H, а Θ – двуместный предикат, определенный на парах подмножеств произвольной полугруппы (одноэлементные подмножества при этом отождествляются с элементами полугруппы). Алгебра (A,B,C,f) аппроксимируема относительно предиката Θ по первой компоненте в классе H, если для любых подмножеств A_1, A_2 полугруппы A из области задания предиката Θ таких, что $\Theta(A_1,A_2)$ – ложно, найдется гомоморфизм $\mu=(\alpha,\beta,\gamma)$ из Φ, при котором $\Theta(\alpha(A_1),\alpha(A_2))$ – ложно. Аналогично можно сформулировать понятия аппроксимируемости алгебр по второй и третьей компонентам относительно предиката Θ в классе H.

Вопросами аппроксимации алгебр начали заниматься лишь в последние десятилетия XX века. К ним обращались С. И. Кублановский [14], А. В. Попырин [9], Н. В. Плотникова [15–18]. Последней были найдены условия аппроксимируемости трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно таких предикатов, как: равенство, вхождение элемента в идеал, вхождения элемента в подполугруппу, делимость – комплексными и вещественными характерами.

В работе рассматриваются элементарные и единично идеальные предикаты. Существуют классический набор элементарных двуместных предикатов: равенство; вхождение элемента в подполугруппу; вхождение элемента в идеал; вхождение элемента в подгруппу; вхождение элемента в максимальную подгруппу; обобщенная делимость; отношения Грина. Хорошо известно, какую важную роль в теории полугрупп играют понятия единицы и нуля полугруппы. Эти понятия довольно естественно обобщаются в понятие единично идеального элемента. Интерес к таким элементам определяется с точки зрения понятия единично идеальной подполугруппы, введенного Е. С. Ляпиным [19] и играющего важную роль при изучении зависимостей между подполугруппами полугруппы. В связи со сказанным выше, представляется важным и интересным рассмотрение аппроксимации трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно этих предикатов различными характерами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Описать алгебры, аппроксимируемые относительно некоторых важных предикатов (эквивалентность Грина, вхождение элемента в подгруппу, вхождение элемента в максимальную подгруппу, единично идеальные предикаты) различными характерами. Выявить связи между аппроксимируемостью алгебр и аппроксимируемостью самих компонент в некоторых классах полугрупп. Найти минимальные классы аппроксимации алгебр относительно предикатов равенства и вхождения элемента в подполугруппу.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Целью работы являлось исследование аппроксимируемости трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр в классах алгебр, у которых первая компонента является произвольной коммутативной полугруппой, а вторая полугруппой ее обобщенных характеров. В рамках реализации данной цели в диссертации решаются следующие задачи: описание алгебр, аппроксимируемых относительно некоторых важных предикатов различными характерами; выявление связи между аппроксимируемостью алгебр и аппроксимируемостью самих компонент; нахождение минимальных классов аппроксимации алгебр относительно некоторых предикатов.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Все основные результаты работы являются новыми.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. Основой исследования в работе служит установление связей между полугруппой обобщенных характеров и гомоморфизмами трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр методом построения гомоморфизма алгебры с помощью гомоморфизмов исходных полугрупп. При построении гомоморфизмов алгебр используются: метод продолжения гомоморфизма максимальной подгруппы коммутативной полугруппы до гомоморфизма всей полугруппы в группу с внешне присоединенным нулем, метод вложения связки коммутативных полугрупп с сокращением в регулярную коммутативную полугруппу.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для исследований по теории двойственности полугрупп, теории аппроксимируемости полугрупп, для изучения многоосновных алгебраических структур, базовыми компонентами которых являются полугруппы.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты диссертационного исследования неоднократно обсуждались на заседаниях Санкт-

Петербургского семинара по теории полугрупп, семинара «Полугруппы и другие алгебраические системы» при УрГУ (Екатеринбург). Результаты работы докладывались на международных конференциях, проходивших в Санкт-Петербурге, в честь Е. С. Ляпина (1995), памяти Д. К. Фаддеева (1997), на III международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения» (Тула, 1997), на международном конгрессе «Молодежь и наука – третье тысячелетие» (Москва, 1996).

ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты диссертации отражены в десяти опубликованных работах, список которых приведен в конце автореферата.

СТРУКТУРА РАБОТЫ. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, содержащих в совокупности восемь параграфов, и занимает 93 страницы печатного текста. Библиография включает в себя 54 работы российских и зарубежных авторов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из двух глав, первая из которых посвящена аппроксимации трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр различными характерами относительно классических элементарных двуместных предикатов. В первом параграфе показана связь аппроксимируемости алгебр классическими характерами над полем с аппроксимируемостью компонент. Причем рассмотрен широкий класс предикатов, названный предикатом вхождения, в который попадают предикаты равенства, вхождения элемента в подполугруппу, в идеал, в подгруппу, в максимальную подгруппу, обобщенная делимость, отношения Грина, единично идеальные предикаты.

В частности показано, что аппроксимируемость алгебр относительно произвольных предикатов по первой компоненте характерами над полем напрямую связана с аппроксимируемостью полугрупп в классе всех коммутативных полугрупп. Эти вопросы составляют отдельное хорошо изученное направление, поэтому вопрос аппроксимируемости алгебр по первой компоненте характерами можно считать закрытым.

Удалось выявить так же связи между аппроксимируемостью алгебр по второй и третьей компоненте характерами над произвольным полем и аппроксимируемостью самих компонент в этом поле. Далее получены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости алгебр по второй и третьей компонентам относительно конкретных предикатов: эквивалентности Грина, вхождения элемента в подгруппу, вхождения элемента в максимальную подгруппу. Результаты эти получены при помощи установленных в первом параграфе связей.

В третьем параграфе найдено общее достаточное условие, накладываемое на вторую компоненту алгебр, для аппроксимируемости их рациональными характерами относительно произвольного предиката вхождения, то есть целого класса предикатов, по второй компоненте. Для предикатов равенства и вхождение в подполугруппу это условие является необходимым и достаточным.

Теорема 1. Для произвольной алгебры *(A,B,C,f)* следующие условия эквивалентны:

1) *(A,B,C,f)* аппроксимируема по второй компоненте относительно вхождения в подполугруппу рациональными характерами;

2) *(A,B,C,f)* аппроксимируема по второй компоненте относительно равенства рациональными характерами;

3) B – коммутативная сепаративная полугруппа без кручения, и типы элементов, отличных от единицы в подполугруппе дробей полугруппы B, имеют вид $(0,0,...,0,...)$.

Как следует из работ М. М. Лесохина [6, 15] нельзя расширить класс алгебр обобщенных характеров $(M,Hom(M,L),L,f_0)$, рассматривая его элементы как подалгебры некоторых других алгебр, без потери их основополагающих свойств и расширения класса алгебр, аппроксимируемых обобщенными характерами. Но возникает тогда противоположный вопрос: можно ли сузить этот класс, без потери свойств алгебр, аппроксимируемых в нем? В некоторой мере ответ дают четвертый и пятый параграфы работы. В них исследуется алгебра аддитивных рациональных характеров, с точки зрения возможности замены моноида Q_{+}^{z} той или иной его подполугруппой с сохранением аппроксимируемости в новом классе тех алгебр, которые были аппроксимируемы аддитивными рациональными характерами.

Теорема 2. Для того чтобы алгебра была аппроксимируема относительно равенства и вхождения в подполугруппу по второй компоненте аддитивными рациональными характерами, необходимо и достаточно, чтобы вторая ее компонента была коммутативной, сепаративной, степенно сократимой полугруппой. Для того чтобы алгебра с коммутативной первой компонентой была аппроксимируема относительно равенства и вхождения в подполугруппу по третьей компоненте аддитивными рациональными характерами, необходимо и достаточно, чтобы третья ее компонента была коммутативной, сепаративной, степенно сократимой полугруппой.

Пусть Ω_1 – класс алгебр, у которых первая компонента коммутативная полугруппа, Ω_2 – класс алгебр, у которых вторая компонента коммутативная, сепаративная, степенно сократимая полугруппа, Ω_3 – класс алгебр, у которых первая компонента коммутативная полугруппа, а третья компонента коммутативная, сепаративная, степенно сократимая полугруппа.

Показано, что алгебра аддитивных рациональных характеров не является минимальным классом аппроксимации по первой компоненте для алгебр Ω_1 относительно предикатов равенства и вхождения в подполугруппу. Но верна следующая теорема:

Теорема 3. Алгебра аддитивных рациональных характеров является минимальным классом аппроксимации относительно предикатов равенства и вхождения в подполугруппу для алгебр Ω_2 по второй компоненте и алгебр Ω_3 по третьей компоненте.

Вторая глава работы посвящена аппроксимации относительно единично идеальных предикатов, которые играют очень важную роль в теории полугрупп. Первые два из единично идеальных предикатов есть некоторые аналоги равенства. Аппроксимации относительно вхождения во множество единично идеальных элементов и равенства единично идеальных элементов характерами над полем, периодическими комплексными, положительными вещественными, рациональными характерами и посвящен первый параграф второй главы. В большинстве случаев найдены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости алгебр относительно первых двух предикатов перечисленными характерами. Третий единично идеальный предикат есть частный случай предиката вхождения в подполугруппу.

Теорема 4. Для того чтобы *(A,B,C,f)* была аппроксимируема по второй компоненте относительно вхождения в единично идеальную подполугруппу периодическими комплексными характерами, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа B являлась инверсной вполне регулярной.

Теорема 5. Если *(A,B,C,f)* с коммутативной первой компонентой аппроксимируема по третьей компоненте относительно вхождения в единично идеальную подполугруппу периодическими комплексными характерами, то полугруппа C является инверсной вполне регулярной.

Теорема 6. Если *(A,B,C,f)* имеет коммутативную первую и инверсную вполне регулярную третью компоненты, причем совокупность E_C всех идемпотентов полугруппы C является нулевой подполугруппой C, то *(A,B,C,f)* аппроксимируема по третьей компоненте относительно вхождения в единично идеальную подполугруппу периодическими комплексными характерами.

Цель рассмотрения расширенных характеров – показать, что регулярность компонент в алгебрах является «основным» необходимым и достаточным условием для аппроксимируемости их относительно вхождения в единично идеальную подполугруппу.

Пусть Ω – класс алгебр, у которых первая компонента коммутативна, а третья – коммутативная регулярная полугруппа.

Теорема 7. Расширенная алгебра периодических комплексных характеров является минимальным классом аппроксимации относительно вхождения в единично идеальную подполугруппу для алгебр класса Ω по третьей компоненте.

Предикаты делимости единично идеальных элементов и инверсности единично идеальных элементов являются различными сужениями предиката обобщенной делимости.

Теорема 8. Для любого поля P произвольная алгебра (A,B,C,f) аппроксимируема по второй компоненте относительно предикатов делимости и инверсности единично идеальных элементов характерами над полем P.

Теорема 9. Для любого поля P произвольная алгебра (A,B,C,f) с коммутативной первой компонентой аппроксимируема по третьей компоненте относительно предикатов делимости и инверсности единично идеальных элементов характерами над полем P.

Последними двумя теоремами закрывается вопрос об аппроксимируемости трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр характерами над полем относительно оставшихся трех единично идеальных предикатов.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикация в издании, рекомендованном ВАК:

- Толкачева Е. А. Связь аппроксимируемости трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр с аппроксимируемостью их компонент // Вестник Поморского Университета. 2006. №3. С. 125–127.

Другие публикации:

- Толкачева Е. А. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно эквивалентности Грина // Вестник математического факультета ПГУ им. Ломоносова: Межвуз. сб. науч. тр. Архангельск, 1997. Вып. 1. С. 42–44.
- Толкачева Е. А. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно единично идеальных предикатов по второй компоненте // Тез. докл. Международной алгебраической конференции памяти Д. К. Фаддеева. СПб, 1997. С.291.
- Толкачева Е. А. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно единично идеальных предикатов по третьей компоненте // Современная алгебра: Межвуз. сб. науч. тр. Ростов-на-Дону, 1997. Вып. 2(22). С.95–99.
- Толкачева Е. А. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно некоторых предикатов вхождения // РГПУ им. Герцена. СПб, 1998. 10с. Деп. в ВИНИТИ. 03.08.98, №2485-В98.
- Толкачева Е. А. Минимальный класс аппроксимации трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно предикатов равенства и вхождения в подполугруппу // Вестник математического факультета ПГУ им. Ломоносова: Межвуз. сб. науч. тр. Архангельск, 2001. Вып. 4. С. 21–25.
- Tolkacheva E. A. On approximation of semigroups by homomorphisms to *{0,1}* with respect to Green's *D*-equivalence // Internatinal conference «Semigroups and their applicftions, includung semigroup rings» in honour of E.S.Ljapin. St.-Petersburg, 1995. P.73.
- Толкачева Е. А. Об аппроксимации характерами трехосновных дистрибутивных полугрупповых алгебр // Тез. докл. III Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения». Тула, 1996. С. 142–143.

• Толкачева Е. А. Связь аппроксимируемости трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр с аппроксимируемостью их компонент // X Царскосельские чтения: Международная научная конференция, 25–26 апр. 2006. / ЛГУ им. А.С. Пушкина. СПб, 2006. T.VI. С. 163–165.

• Толкачева Е. А., Поспелов М. В. О *D*-аппроксимации характерами трехосновных дистрибутивных полугрупповых алгебр // Труды междунар. конгресса YSTM'96: «Молодежь и наука – третье тысячелетие». М, 1997. Т.1. С. I-19.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. Зап. Ивановского пед. ин-та. 1958. Т.18. С. 49–60.
2. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
3. Лесохин М. М. О гомоморфизмах систем с внешним умножением // Уч. Зап. ЛГПИ им. Герцена. 1971. Т.404. С. 220–232.
4. Лесохин М. М. О дистрибутивных операциях на полугруппах // Уч. Зап. ЛГПИ им. Герцена. 1967. Т.302. С. 101–116.
5. Лесохин М. М. О полноте систем с внешним умножением // Изв. ВУЗов. 1963. Математика №5. С. 59–62.
6. Лесохин М. М. О правильности систем с внешним умножением и простоте их компонент // Уч. Зап. ЛГПИ им. Герцена. 1961. Т. 218. С.23–37.
7. Лесохин М. М. Системы с внешним умножением с периодическими и полными компонентами // Изв. ВУЗов. 1964. Математика №2(39). С. 94–99.
8. Лесохин М. М. Характеры и бихарактеры полугрупп // Тез. докл. I Всесоюз. симпозиума по теории полугрупп. Свердловск, 1969. С. 43–51.
9. Попырин А. В. Билинейные отображения коммутативных регулярных полугрупп: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук /АН Молдавской ССР. Кишинев, 1985.

10. Попырин А. В. О свойствах билинейных отображений коммутативных полугрупп // Свойства полугрупп: Межвуз. сб. науч. тр. Л, 1984. С. 122–130.
11. Шварц Ст. Теория характеров конечных коммутативных полугрупп // Чехослов. матем. ж. 1954. т.4(79). С. 291–293.
12. Шварц Ст. Характеры коммутативных полугрупп как функции классов // Чехослов. матем. ж. 1954. т.4(79). С. 293–295.
13. Schwarz St. The theory of characters of commutative Hausdorf bicompact semigroups // Чехослов. матем. ж. 1956. Т.6. С. 333–364.
14. Кублановский С. И. Аппроксимация алгебраических систем относительно предикатов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / АН Молдавской ССР. Кишинев, 1983.
15. Плотникова Н. В. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебраических систем относительно равенства // Тез. докл. Международной конференции по алгебре, посв. памяти академика А. И. Мальцева. Новосибирск, 1989. С. 103.
16. Плотникова Н. В. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр // Исследования полугрупп. Л, 1990. С. 87–96.
17. Плотникова Н. В. Аппроксимация трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр // Полугруппы и их гомоморфизмы. Л, 1991. С. 69–75.
18. Плотникова Н. В. Об аппроксимации трехосновных полугрупповых дистрибутивных алгебр относительно вхождения элемента в подполугруппу // Полугруппы и их гомоморфизмы. Л, 1992. С. 113–117.
19. Ляпин Е. С. Единично идеальные элементы полугрупп // Теория полугрупп и ее приложения. Вып. 2. Изд-во Саратовского ун-та, 1970.