На правах рукописи

Кащенко Илья Сергеевич

ДИНАМИКА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2006

Работа выполнена на кафедре компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Майоров Вячеслав Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Малинецкий Георгий Геннадьевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Дмитриев Александр Сергеевич

Ведущая организация — Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Защита состоится «____»____________ 2006 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 212.002.04 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «____»____________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

В настоящее время одним из наиболее активно развивающихся направлений математического анализа являются исследования динамики систем с распределенными параметрами. Эти исследования стимулируются появлением большого числа прикладных задач, для моделирования которых используют такие объекты, как дифференциальные уравнения с запаздыванием. Уравнения такого типа возникают, например, в лазерной оптике, (Gibbs H.M., Hopf F.A., Kaplan D.L., Shoemaker R.L., Ikeda K.) электротехнике, (Schwarz W., Moegel A., Kilias T., Kutzer K.), радиофизике, (Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Ланда П.С.), медицине, (Марчук Г.И., Петров Р.В.), математической экологии, (Горяченко В.Д., Колесов Ю.С.), теории нейронных систем, (Малинецкий Г.Г., Майоров В.В.), при описании процесса резания металлов (Эльясберг М.Е., Клушин М.И.) и др.

Изучению уравнений с запаздыванием посвящено значительное и бурно увеличивающееся число публикаций как теоретического, так и прикладного характера. Для многих уравнений, содержащих запаздывание, хорошо зарекомендовали себя классические асимптотические методы, такие как методы усреднения Крылова-Боголюбова, методы пограничных функций в случае сингулярных возмущений (Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.).

Тем не менее, развитие аналитических методов для систем с запаздыванием явно недостаточно. В силу принципиальной сложности систем с бесконечномерным фазовым пространством особую значимость как для общетеоретических вопросов, так и для решения конкретных прикладных задач приобретает разработка новых асимптотических методов исследования динамических свойств решений.

В работе исследуется динамика уравнений первого порядка с запаздыванием одного из следующих видов

$$\dot{x} + x = f(x, x(t-T)), \tag{1}$$

$$\dot{x} + x = f(x, x(t-T), x(t-T_1)) \quad (T_1 < T), \tag{2}$$

$$\dot{x} + x = f(\int\limits_{-T}^{0} x(t+s)dr(s)). \tag{3}$$

Фазовым пространством таких уравнений удобно считать пространство $C_{[-T,0]}$ непрерывных на $[-T, 0]$ функций со стандартной нормой. В этом смысле эти уравнения существенно сложнее обыкновенного скалярного дифференциального уравнения, которое получается, если положить $T = 0$.

Замечено, что даже незначительное увеличение времени запаздывания приводит к кардинальным изменениям в динамике системы. Поэтому вопрос о динамике уравнений с большим запаздыванием является очень важным. С другой стороны, как показывают численные расчеты для ряда уравнений (например, для уравнения Хатчинсона), все эффекты большого запаздывания можно наблюдать уже при небольших его значениях. Поэтому особую важность имеет исследование динамики уравнений вида (1)–(3) при условии, что запаздывание является достаточно большим.

Уравнение Стюарта-Ландау

$$\dot{z} = (a + b|z|^2)z + cz(t - T)$$

является типичным представителем систем с запаздыванием. Кроме того, оно часто встречается в реальных задачах физики, техники, биологии, медицины. В предлагаемой работе предпринята попытка описать динамику уравнения Стюарта-Ландау с использованием разработанных методов. Также, развитые в диссертации алгоритмы позволяют провести локальный анализ динамики уравнения Стюарта-Ландау с отклонением пространственной переменной и малой диффузией ($0 < \varepsilon \ll 1$):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (a + b|z|^2)z + c\int_0^1 z(t, x + s)\, dr(s) + \varepsilon^2 d^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z(t, x) = z(t, x + 1).$$

Цель работы

Основной целью данной диссертационной работы является:

- разработка новых методов и алгоритмов исследования сложной динамики дифференциальных уравнений с большим запаздыванием;

- применение методики для изучения конкретных видов уравнений;

- исследование динамики уравнения Стюарта-Ландау, представляющего большой практический интерес.

Методы исследования

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории сингулярных возмущений, метод нормальных форм.

Научная новизна работы

Все результаты диссертации являются новыми.

Разработан метод исследования сложной динамики дифференциальных уравнений с большим запаздыванием

Расширены и дополнены результаты исследования поведения решений дифференциальных уравнений с одним большим запаздыванием в случаях, близких к критическим.

Получены результаты, позволяющие судить о динамике уравнений с двумя запаздываниями в случаях, когда только одно запаздывание является большим, оба запаздывания большие одного порядка, а также в случае когда оба запаздывания велики, но одно из них по порядку больше другого.

Получены результаты, описывающие динамику уравнений с большим линейно и периодически распределенным запаздыванием.

Для уравнения Стюарта-Ландау исследована локальная динамика, а также изучен вопрос существования и устойчивости у этого уравнения решений в виде бегущих волн.

Исследована локальная динамика уравнения Стюарта-Ландау с малой диффузией и отклонением пространственной переменной.

Положения, выносимые на защиту

1. Метод построения асимптотического приближения решений уравнений с большим запаздыванием в случаях, близких к критическим.

2. Результаты исследования динамики уравнений с большим запаздыванием.

3. Классификация критических случаев для различных систем с двумя запаздываниями и с распределенным запаздыванием.

4. Результаты исследования динамики уравнения Стюарта-Ландау (обычного и с отклонением пространственной переменной).

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение. Они могут быть применены при исследовании динамики дифференциальных уравнений с запаздыванием и также для изучения прикладных задач, например, радиофизики, электроники, лазерной оптики.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета им. Ломоносова, Москва, 2004 г.;

2. II Международная конференция „Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания“, Обнинск, 2004;

3. XXVII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, 2005;

4. Международная научная конференция "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования", Воронеж, 2005;

5. Международная конференция "Тихонов и современная математика", Москва, МГУ, 2006.

Кроме того, результаты диссертации докладывались на ряде семинаров кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, на семинаре „Моделирование и исследование нейронных сетей“ кафедры компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, а также на семинаре кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 9 работ: 4 статьи, 4 тезиса докладов и одно учебное пособие. Из работ, выполненных совместно, в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 40 наименований. Диссертация содержит 4 рисунка и два приложения.

Общий объем диссертации составляет 110 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** дается общая характеристика работы, обсуждается актуальность темы диссертации, приводится краткий обзор литературы по данной тематике.

Первая глава посвящена локальному анализу уравнений вида (1)–(3) в окрестности состояния равновесия. Наибольший интерес в этой части представляет изучение поведения решений этих уравнений при условии, когда запаздывание T достаточно велико.

В **первом параграфе** первой главы приводятся общие сведения и хорошо известные базовые результаты о поведении решений нелинейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + F(x(t - T)). \tag{4}$$

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (4) имеет место теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Рассмотрим линеаризованное на нулевом состоянии равновесия уравнения (4) уравнение

$$\dot{x} + x = ax(t - T).$$

Положим в нем $x = \exp(-\lambda t)$. В результате получим характеристическое уравнение

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T}. \tag{5}$$

Утверждение 1. *Пусть все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Тогда нулевое решение (4) асимптотически устойчиво. Если же характеристический квазиполином (5) имеет корень λ_0 с положительной вещественной частью, то нулевое решение уравнения (4) неустойчиво.*

Таким образом, необходимо исследовать поведение решений уравнения (4) в малой окрестности состояния равновесия лишь в тех случаях, когда квазиполином (5) имеет корни с нулевой вещественной частью (или близкой к нулю) и не имеет с положительной.

Такая ситуация возникает в двух случаях. Во-первых, уравнение (5) может иметь один нулевой корень, а все остальные его корни будут иметь отрицательные вещественные части. Во-вторых, (5) может иметь пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$, а все остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

В первом случае локальная динамика описывается поведением решений скалярного уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = \lambda_1 z + dz^2.$$

а во втором — поведением решений нелинейного комплексного уравнения вида

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + d|\xi|^2 \xi,$$

Во **втором параграфе** первой главы рассматривается локальная динамика уравнения с большим запаздыванием. Приводятся некоторые известные результаты[1] и полученные новые результаты, существенно их дополняющие.

[1] *Кащенко, С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — №8. — С. 1448–1451.

Основное отличие этого параграфа от предыдущего в том, что в уравнении (4) параметр $T = \varepsilon^{-1}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$.

В пункте 2.1 ставится задача и формулируются известные результаты о динамике общего характера. В пункте 2.2 исследуется расположение корней характеристического уравнения.

Лемма 1. *Если $|a| < 1$, то нулевое решение асимптотически устойчиво. Все решения из некоторой малой окрестности стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Если $|a| > 1$, то нулевое решение неустойчиво, и в некоторой его фиксированной окрестности нет устойчивых режимов.

При $|a| = 1$ и $\varepsilon \to 0$ сразу бесконечно число корней характеристического уравнения стремится к мнимой оси, таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность. Для корней, стремящихся к мнимой оси, приводятся асимптотические формулы.

В пункте 2.3 описывается динамика при значениях a близких к 1. Пусть $a = 1 + \varepsilon^2 a_1$. Тогда в окрестности состояния равновесия динамика исходного уравнения описывается краевой задачей параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + f_2 u^2, \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \tag{6}$$

Решения (4) и (6) связываются связываются посредством формулы

$$x(t) = \varepsilon^2 u(\varepsilon^3 t, \varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t)(1 + o(1)).$$

Если $a = 1 + \varepsilon^p a_1$ $(0 < p < 2)$, то вместо одной краевой задачи мы получаем семейство краевых задач, зависящее от непрерывного положительного параметра ω:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right). \tag{7}$$

В этом случае решения исходного уравнения (4) и (7) связываются асимптотической формулой

$$x(t) = \varepsilon^p u(\varepsilon^3 t, \varepsilon(\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) - \varepsilon^{p/2}\omega + o(1))t)(1 + o(1)).$$

В пункте 2.4 уравнение изучается при a близких к -1. Если $a = -1 - \varepsilon^2 a_1$, то приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r+1). \tag{8}$$

Решения этой системы связаны с решениями исходного уравнения через равенство

$$x(t) = \varepsilon u(\varepsilon^3 t, \varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t)(1 + o(1)).$$

Если $a = -1 - \varepsilon^p a_1$ $(0 < p < 2)$, то опять получим семейство краевых задач параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^2, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}). \tag{9}$$

Решения (4) выражаются через решения (9) следующим образом

$$x(t) = \varepsilon^{p/2} u(\varepsilon^3 t, \varepsilon(\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) - \varepsilon^{p/2}\omega + o(1))t)(1 + o(1)).$$

Следующие четыре параграфа первой главы, с §3 по §6, посвящены локальной динамике уравнений с двумя запаздываниями вида

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + f(x, x(t-T), x(t-T_1)), \quad 0 < T < T_1. \tag{10}$$

В **третьем параграфе** изучается уравнение (10) в случае, когда одно запаздывание является большим, а второе имеет порядок 1, т.е. $T_1 = \varepsilon^{-1}$, а параметры a, b и T как-то фиксированы. Отдельно исследуется ситуация, когда слагаемое с большим запаздыванием входит с малым множителем, т.е. $b = T^{-q} b_1$. Описаны известные результаты[2], а также ряд новых результатов.

В пункте 3.1 содержится постановка задачи об исследовании локальной динамики уравнения (10).

В пункте 3.2 исследуется расположение корней характеристического уравнения, выделяются критические случаи. Вводятся константы $a_0(T)$ и $b_0 = b_0(T, a)$.

Лемма 2. *Пусть $a > 1$, либо $a < a_0(T)$, либо $|b| > b_0$.. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в произвольно фиксированной (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (10) нет устойчивых решений.*

Лемма 3. *Пусть $|b| < b_0$, $a_0(T) \leqslant a \leqslant 1$. Тогда при всех достаточно малых ε все решения* (10) *из малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля стремятся к нулю.*

Таким образом, критические случаи возникают при условии $a_0(T) \leqslant a \leqslant 1$ и $b = b_0(T, a)$.

В этом же пункте изучается ситуация $a_0(T) < a < 1$. Полагая параметр b близким к критическому значению, получим что локальная динамика (10) описывается одним комплексным параболическим уравнением. Если $b = b_0 + \varepsilon^2 b_1$, то это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \tag{11}$$

[2] *Кащенко, С.А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием / С.А. Кащенко // Сибирский математический журнал. — Т. 40. — №3. — 1999. — С. 567–572.

Если $b = b_0 + \varepsilon^p b_1$ $(0 < p < 2)$, то мы получим семейство краевых задач, зависящее от непрерывного параметра ω

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right). \tag{12}$$

Отметим, что в обоих случаях $\operatorname{Re} d_1 > 0$. Формула, показывающая связь решений уравнения (10) и нормализованной формы, имеет вид: для уравнения (11)

$$x(t) = \varepsilon \left(e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta+\Omega-\varepsilon\varphi'(\omega_0)(\theta+\Omega))it} u(\varepsilon^3 t, \varepsilon t(1-\varepsilon\varphi'(\omega_0)) + \text{к.с.}\right)(1+o(1)),$$

а для уравнения (12)

$$x(t) = \varepsilon^{p/2}\left(e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti} u(\varepsilon^{p+1}t, \varepsilon(\omega\varepsilon^{p/2-1}+\theta-\varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t) + \text{к.с.}\right)(1+o(1)).$$

В пункте 3.3 исследуется случай, когда коэффициент a близок к $a_0(T)$ или к 1. Тогда $b_0 = 0$. В этом случае структура нормализованных форм резко меняется. Пусть $a = 1 + \varepsilon^p a_1$, $b = \varepsilon^p b_1$ $(p > 0)$. Тогда динамика исходного уравнения (10) описывается поведением решений скалярного уравнения с одним запаздыванием

$$(1+T)\frac{d\xi}{d\tau} = a_1\xi(\tau) + b_1\xi(\tau - \varepsilon^{p-1}) + f_2\xi^2. \tag{13}$$

Особый интерес представляет то, что при $p < 1$ это уравнение является уравнением с большим запаздыванием.

Решения (10) выражаются через решения (13) следующим образом:

$$x(t) = \varepsilon^p\xi(\varepsilon^{p+1}\tau(1+o(1))(1+o(1)).$$

Если же $a = a_0(T) + \varepsilon^p a_1$, $b = \varepsilon^p b_1$ $(p > 0)$, то аналог уравнения (13) имеет вид комплексного уравнения с запаздыванием

$$\frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - \varepsilon^{p-1}) + \sigma_1|\xi|^2\xi. \tag{14}$$

Также, если $p < 1$, то мы имеем уравнение с большим запаздыванием.

Решения уравнения (10) записываются через решения (14) с помощью формулы

$$x(t) = \varepsilon^{p/2}\left(\xi(\varepsilon^2 t)e^{i\omega_0(T)t} + \overline{\xi}(\varepsilon^2 t)e^{-i\omega_0(T)t}\right)(1+o(1)).$$

В **четвертом параграфе** первой главы рассматривается уравнение (10) в случае, когда оба запаздывания являются большими, различающимися на константу числами

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(1+\varepsilon c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В пункте 4.1 ставится задача исследовать локальную динамику, а также приводятся некоторые необходимые условия асимптотической устойчивости нулевого решения. Выделяются критические случаи, аналогичные рассмотренным в §2. Они имеют место, когда величина $|a+b|$ близка к 1.

В пункте 4.2 исследуется динамика в случае, близком к критическому, при условии близости $a+b$ к 1. В предположении

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0 + b_0 = 1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0, \quad 0 < p < 2$$

строятся уравнения, играющие роль нормальных форм. Такие уравнения имеют вид параболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1) u + f_2 u^2$$

с некоторыми краевыми условиями. При $p = 2$ они имеют вид

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1),$$

а при $0 < p < 2$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}).$$

Таким образом при $0 < p < 2$ нормализованная форма является семейством краевых задач, зависящим от параметра ω.

В пункте 4.3 разбирается похожая ситуация, когда $a + b$ близко к -1. Предполагается, что

$$a = a_0 - \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 - \varepsilon^p b_1, \quad a_0 + b_0 = -1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0, \quad 0 < p < 2.$$

Нормализованные формы, получающиеся в этом пункте, при $p = 2$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1) u + (f_2^2 + f_3) u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1).$$

Если $0 < p < 2$, то получаем семейство краевых задач

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1) u + (f_2^2 + f_3) u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}),$$

зависящее от непрерывного параметра $\omega > 0$.

Пункт 4.4 посвящен критическим случаям на больших модах, которые возникают при выполнении условий $|a + b| < 1$ и близости ab к некоторой константе β_0.

Пусть $a = a_0 + \varepsilon^p a_1$, $b = b_0 + \varepsilon^p b_1$, $|a_0 + b_0| < 1$ и $a_0 b_0 = \beta_0$. Тогда в качестве нормализованной формы мы получим комплексное параболическое уравнение ($\operatorname{Re} d_1 > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + d u |u|^2.$$

Краевые условия при $p = 2$ имеют вид

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1),$$

а при $0 < p < 2$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}).$$

Формула, связывающая решения нормализованной формы и уравнения (10) записывается как

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \left(e^{(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \Omega + \theta_0(\varepsilon))it} u(\varepsilon^{p+1} t, \varepsilon(1+o(1))t) + \text{ к.с.} \right) (1 + o(1)).$$

Наконец, в пункте 4.5 кратко рассматривается более общая ситуация

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(1 + \varepsilon^q c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 < q < 1,$$

$$a = a_0 + \varepsilon^{p_*} a_1, \quad b = b_0 = \varepsilon^{p_*} b_1.$$

Здесь p_* некоторым образом выражается через q. Для этой ситуации исследуется локальная динамика в окрестности нуля, строятся области асимптотической устойчивости и неустойчивости. В критических случаях, которые здесь возникают только когда $|a| + |b| \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, строятся уравнения, играющие роль нормализованных форм. Оказывается, что существенно различными являются результаты в случаях $0 < q < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$.

Если $\frac{1}{2} \leqslant q < 1$, то в качестве нормализованных форм получаются нелинейные параболические уравнения с периодическими или антипериодическими краевыми условиями, в зависимости от знаков a_0 и b_0.

Если $0 < q < \frac{1}{2}$, то нормализованные формы имеют вид параболических нелинейных краевых задач с двумя пространственными переменными. Точный их вид, а также краевые условия зависят от знаков a_0 и b_0. Так, например, при $a_0 \geqslant 0$, $b_0 \geqslant 0$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 b_0 c^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1) u + f_2 u^2,$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r+1, s) = u(\tau, r, s+1).$$

В **пятом параграфе** первой главы изучается динамика уравнения (10) в ситуации, когда оба запаздывания большие, пропорциональные друг другу величины:

$$T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_1 = (k_0 + \varepsilon^{\alpha} k_1) T, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В пункте 5.1 приводится постановка задачи и разбирается случай иррационального значения k_0.

Далее k_0 предполагается рациональным числом $k_0 = \frac{m}{n}$. В пункте 5.2 описывается ситуация $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Выделяются критические случаи и строятся нормализованные случаи. Как оказывается, результаты существенно зависят от значения α. Отдельно рассматриваются случаи $\alpha = 1$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

В пункте 5.3 предполагается, что $a < 0$ и $b < 0$. Ситуация $0 < \alpha < 1$ разбирается полностью аналогично предыдущему случаю. Если же $\alpha = 1$, то результаты несколько меняются. В частности, значения a и b, при которых реализуется критический случай зависят от m и n.

Пункты 5.4 и 5.5 посвящены ситуациям $a \geqslant 0$, $b < 0$ и $a < 0$, $b \geqslant 0$ соответственно. Результаты, приведенные здесь, повторяют результаты пункта 5.3.

Два заключительных пункта этого параграфа посвящены выводам и обобщениям. В пункте 5.6 делаются выводы и приводятся теоремы, описывающие связь решений построенных нормализованных форм с решениями исходного уравнения, а в пункте 5.7 приводятся обобщения рассмотренной задачи на случай $\alpha > 1$ и на случай, когда коэффициенты a и b отклоняются от критических значений на величину порядка ε^p (для произвольного $p > 0$).

Шестой параграф первой главы посвящен ситуации, когда оба запаздывания большие, но различные по порядку. Отдельно там же изучается случай, когда перед слагаемым с самым большим запаздыванием стоит малый множитель.

В пункте 6.1 рассматривается случай

$$T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_1 = \frac{1}{c\varepsilon^2}, \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Нулевое решение уравнения (10) тогда асимптотически устойчиво при $|a| + |b| < 1$ и неустойчиво при $|a| + |b| > 1$. При $|a| + |b| = 1$ возникает критический случай. Положим

$$a = a_0 + \varepsilon^2 b_0 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_0 b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1.$$

Тогда динамика (10) определяется параболическим нелинейным уравнением с двумя пространственными переменными. Точный вид таких уравнений и краевых условий существенно зависит от знаков a_0 и b_0. Например, если $a_0 \geqslant 0$, $b_0 > 0$, то соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{a_0 c^2}{2b_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2}\left(1 + 2a_0 c\theta_1 + a_0 c^2\theta_1^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2}(1 + c\theta_1)\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \\ &+ (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad u(\tau, r, s) = u(\tau, r+1, s) = u(\tau, r, s+1). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет $(c\varepsilon)^{-1}$ до целого числа.

В пункте 6.2 описываются результаты для более общего случая. Там предполагается

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = T_1\frac{1}{c\varepsilon^q}, \quad c > 0, \quad q > 0.$$

$$a = a_0 + \varepsilon^p b_0 a_1,\ b = b_0 + \varepsilon^p b_0 b_1,\ |a_0| + |b_0| = 1,\ 0 < p \leqslant 2q,\ p \leqslant 2.$$

Нормализованные формы, как оказывается, зависят от соотношения между p и q и, как и ранее, от знаков a_0 и b_0. Так, если $a_0 \geqslant 0$, $b_0 > 0$, $0 < q < 1$, а $p = 2q$, то нормализованная форма имеет вид уравнения, такого же как и (15), но с другими краевыми условиями:

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}, s) = u(\tau, r, s + 1).$$

Если выполнено $0 < q < 1$ и $0 < p < 2q$ или $q > 1$ и $0 < p < 2$, то нормализованная форма для уравнения (10) в этом случае принимает вид двупараметрического семейства краевых задач, зависящего от положительных параметров $\omega_{1,2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^2}{2b_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \tag{16}$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega_1}, s) = u(\tau, r, s + \frac{2\pi}{\omega_2}). \tag{17}$$

Наконец, если $q > 1$, $p = 2$, то получаем однопараметрическое семейство краевых задач, зависящее от непрерывного положительного параметра ω. Уравнение здесь в точности совпадает с уравнением (16), а краевые условия имеют вид

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + \frac{2\pi}{\omega}).$$

В пунктах 6.3 и 6.4 изучается влияние малого множителя перед слагаемым с самым большим запаздыванием. В п. 6.3 предполагается, что

$$T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_1 = \frac{c}{\varepsilon^3}, \quad b = \varepsilon^2 b_0, \quad a = a_0(1 + \varepsilon^2 a_1), \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Критические случаи возникают, когда параметр $a_0 = \pm 1$. Если $a_0 = 1$, то нормализованная форма имеет вид одного уравнения параболического типа с запаздыванием и отклонением пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c, r + \theta_1) + f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1).$$

Если $a_0 = -1$, то соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c, r + \theta_1) + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1).$$

В пункте 6.4 полученные результаты обобщаются на случай

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon},\ T_2 = T_1 \frac{c}{\varepsilon^q}, \quad b = \varepsilon^p b_0,\ a = a_0(1+\varepsilon^p a_1), \quad c > 0,\ q > 0,\ 0 < p \leqslant q,\ p \leqslant 2.$$

Аналогично предыдущему, если $a_0 = 1$, то нормализованная форма исходного уравнения (10) представляет собой однопараметрическое семейство краевых задач с запаздыванием и отклонением пространственной переменной следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c\varepsilon^{p-q}, r + \theta_1) + f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}).$$

Если $a_0 = -1$, то соответствующее уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c\varepsilon^{p-q}, r + \theta_1) + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}).$$

Необходимо отметить, что если $p < q$, то величина запаздывания по τ в этих уравнениях становится асимптотически большой.

В параграфах 7 и 8 рассматривается локальная динамика уравнений с распределенным на асимптотически большом отрезке запаздыванием. **Седьмой параграф** первой главы посвящен уравнениям с линейно распределенным запаздыванием

$$\dot{x} + x = \int\limits_{-T}^{0} \left(a + b\frac{s}{T}\right) x(t+s)ds + f(x), \quad T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (18)$$

В пункте 7.1 приводится постановка задачи.

Пункт 7.2 посвящен исследованию расположения корней характеристического уравнения и построению асимптотики корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, в критических случаях.

В последующих пунктах разбираются критические случаи, и строятся нормализованные формы. В пункте 7.3 изучается локальная динамика уравнения (18) при значении b близком к нулю. Приведем основные результаты. Если $b = \varepsilon^2 b_1$, то нормализованная форма уравнения (18) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a+1}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2 \qquad (19)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \quad \int\limits_0^1 u(\tau, r)\, dr = 0.$$

Аналогично, если $b = \varepsilon^p b_1$, $0 < p < 2$, то в качестве нормализованной формы получается уравнение (19) с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}), \quad \int\limits_0^{2\pi\omega^{-1}} u(\tau, r)\, dr = 0.$$

В пункте 7.4 исследуется случай, когда параметр $b = 2a + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2$. Если $b_1 \neq -2$, то нормализованное уравнение получается линейным, следовательно динамика в некоторой окрестности нуля уравнения (18) является очень простой: все решения из некоторой фиксированной окрестности либо стремятся к нулю, либо покидают эту окрестность. В случае $b_1 = -2$ построенная нормализованная форма имеет вид нелинейного параболического уравнения ($M(u)$ — это среднее значение функции u)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{2a+1}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{b_2}{a}u + \frac{2b_2}{a}M(u) - \\ &- \frac{2f_2}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial r}M(u) - 2uM(u) - M(u^2) + 2(M(u))^2\right) \end{aligned}$$

с дополнительными краевыми условиями: u принадлежит замыканию линейного пространства, натянутого на функции $\exp(i\omega_k r)$

$$u \in \overline{Lin\{\exp(i\omega_k r)\}_{k=-\infty}^{\infty}},$$

где ω_k — это решения уравнения $(2 + i\omega_k)\exp(-i\omega_k) = 2 - i\omega_k$.

В пункте 7.5 изучается динамика (18) в критическом случае на больших модах. Предполагается, что

$$a < 0, \quad 2a + 1 < 0, \quad b = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(1+4a)} + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2.$$

При $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$ нормализованная форма принимает вид следующего уравнения:

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a}u + Du|u|^2.$$

Здесь $u = u(\tau, r)$ при каждом τ является комплексной периодической функцией параметра r с периодом 1.

Если $b_1 = -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$, то роль нормальной формы в этом случае играет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (d_3 + id_4)\frac{\partial u}{\partial r} + (d_5 + id_6)u + Du|u|^2.$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1).$$

В **восьмом параграфе** первой главы изучаются уравнения с периодически распределенным запаздыванием

$$\dot{x} + x = a\int\limits_{-T}^{0}\cos\left(\frac{\sigma s}{T}\right)x(t+s)ds + f(x), \quad T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (20)$$

В пункте 8.1 приведена постановка задачи и выделены критические случаи. В пункте 8.2 разбирается динамика (20) в критическом случае, возникающем при $\sigma = 2\pi n$. Основной результат состоит в том, что нормализованная форма имеет вид бесконечномерной системы ОДУ (21).

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_k}{d\tau} &= \lambda_{k2}\xi_k - 2f_2^2\lambda_{k1}\xi_k \sum_{m\neq 0,\pm n} \xi_m\xi_{-m}\frac{3\lambda_{k+m,1}-\lambda_{k1}-\lambda_{m1}}{\lambda_{k+m,1}-\lambda_{k1}-\lambda_{m1}} - \\ &- 3f_3\lambda_{k1}\xi_k \sum_{m\neq 0,\pm n} \xi_m\xi_{-m}.\end{aligned} \tag{21}$$

Пункт 8.3 посвящен критическому случаю, возникающему при условии $\sigma = (2n-1)\pi$. Показано, что нормализованная форма в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{2a+1}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\pi^2N^2}{a^2}(a+1)u - \frac{2f_2^2+3f_3}{a}\frac{d}{dy}u||u||^2 + \\ &+ \frac{\pi^4N^4}{2a^2}J^2(u) - \frac{\pi^4N^4}{a^2}J^3(u) - \frac{\pi^2N^2(2f_2^2+3f_3)}{a}J(u||u||^2)\end{aligned} \tag{22}$$

с краевыми условиями

$$u(\tau,y) = -u(\tau,y+1), \int\limits_0^1 \cos(\pi N y)u(\tau,y)\,dy = 0. \tag{23}$$

Здесь обозначено $||u||^2 = \int\limits_0^1 u^2(\tau,y)dy$, а $J(u)$ — это первообразная функции u по параметру y, удовлетворяющая тем же краевым условиям.

Последний, **девятый параграф** первой главы содержит итоги, обобщения и сравнение полученных результатов.

Вторая глава посвящена применению разработанных методов и алгоритмов для изучения динамики уравнения Стюарта-Ландау

$$\dot z = [a + b|z|^2]z + ce^{i\delta}z(t-T). \tag{24}$$

Многие результаты этой главы без существенных изменений распространяются на более сложное уравнение

$$\dot z = [a + (-1+ib)|z|^2]z + \gamma_0 z(t-T) + gz^2(t-T). \tag{25}$$

В **первом параграфе** второй главы описывается локальная динамика уравнения, (24) как в случае фиксированного запаздывания, так и в случае большого запаздывания. В пункте 1.1 строится характеристическое уравнение и исследуется расположение его корней. При большом запаздывании в выделенных критических случаях приводится асимптотика корней, стремящихся к мнимой оси.

В пунктах 1.2 – 1.4 исследуется динамика в критических случаях при фиксированном значении запаздывания. В пункте 1.2 рассматривается критический случай одного мнимого корня, в пункте 1.3 — критический случай нулевых корней, а в пункте 1.4 разбирается критический случай двух пар чисто мнимых корней.

В пункте 1.5 изучается поведение решений (24) при достаточно большом запаздывании $T = \varepsilon^{-1}$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$. Относительно параметров a, c и δ предполагается что

$$a = a_0 + \mu a_1 \quad (a_0 < 0), \quad c = -a_0 + \mu c_1, \quad \delta = \delta_0 + \mu\delta_1,$$

где $0 < \mu \ll 1$ еще один малый параметр. Далее в пункте последовательно изучается локальная динамика уравнения (24) в этом случае при условиях $\delta_0 = 0$, $\delta_0 = \pi$ и $\delta_0 \neq 0, \pi$, а также $\mu = \varepsilon^2$ и $\mu = \varepsilon$.

Показано, что при условии $\delta_0 = 0$, $\mu = \varepsilon^2$ уравнение, играющее роль нормальной формы для (24), имеет вид комплексного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2a_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \Delta_0 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \tag{26}$$

Для уравнения (25) аналогичные построения приводят к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2a_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{a_1 c_1 - a_0 i\delta_0}{a_0}u - \frac{g}{a_0}u^2, \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r).$$

При условии $\delta_0 = \pi$, $\mu = \varepsilon^2$ соответствующее уравнение для (25) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2a_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{a_0^2} - \frac{a_1 c_1 - a_0 i\delta_0}{a_0}u + d|u|^2 u + \frac{g}{2a_0^2}u^3, \quad u(\tau, r+1) = -u(\tau, r). \tag{27}$$

При $\delta_0 \neq 0, \pi$ и $\mu = \varepsilon^2$ нормализованная форма имеет вид (26).

Если $\mu = \varepsilon$, то нормализованные формы принимают вид однопараметрического семейства краевых задач, зависящего от непрерывного параметра ω. Уравнения в этих задачах имеют такой же вид, как и при $\mu = \varepsilon^2$, меняются только краевые условия. Вместо периодических краевых условий, как в задаче (26), появляются условия

$$u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}) = u(\tau, r).$$

Вместо антипериодических краевых условий, как в задаче (27), имеем

$$u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}) = -u(\tau, r).$$

Во **втором параграфе** второй главы исследуется уравнение Стюарта-Ландау с отклоняющейся пространственной переменной ($0 < \varepsilon \ll 1$):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = [a + b|z|^2]z + \int\limits_0^1 dr(s)\, z(t, x+s) + \varepsilon^2\delta^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z(t, x+1) = z(t, x). \quad (28)$$

В качестве трех основных примеров рассмотрены такие кусочно непрерывные функции $r(s)$, при которых интегральная часть краевой задачи (28) принимает вид:

$$1) \quad c\int\limits_0^1 z(t, x+s)\, ds; \quad (29)$$

$$2) \quad \frac{c}{\sigma\varepsilon}\int\limits_0^1 z(t, x+s) \exp(-\frac{s}{\sigma\varepsilon})\, ds, \quad \sigma > 0; \quad (30)$$

$$3) \quad c_1 z(t, x+h), \quad (h > 0). \quad (31)$$

В пункте 2.1 приводится постановка задачи. В пункте 2.2 исследуется уравнение (28) с интегральной частью (29). Наиболее интересные результаты описываются в пунктах 2.3, 2.4 и 2.5, где изучается динамика (28) с интегральной частью (30) или (31).

В пункте 2.3 изучается случай, когда интегральная часть (28) имеет вид (30). Критические случаи, возникающие здесь бывают двух типов: на малых и больших модах. В критических случаях на малых модах локальная динамика (5) определяется поведением решений параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (\sigma^2 + \delta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_2 u + bu|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \quad (32)$$

В критических случаях на больших модах, нормализованная форма, описывающая локальную динамику уравнения (28), имеет вид следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}d\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + i\theta d\frac{\partial u}{\partial r} + (\frac{1}{2}\theta^2 d + a_1)u + b(|u|^2 + |v|^2)u, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2}\overline{d}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + i\theta\overline{d}\frac{\partial v}{\partial r} + (\frac{1}{2}\theta^2\overline{d} + a_1)v + b(|u|^2 + |v|^2)v, \end{aligned} \quad (33)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+2\pi), \quad v(\tau, r) = v(\tau, r+2\pi). \quad (34)$$

Здесь d – вполне определенная константа, действительная часть которой положительна.

В пункте 2.4 предполагается, что интегральная часть (28) имеет вид (31), причем отклонение аргумента h является малым, т.е. $h = \varepsilon 2\pi h_1$. Здесь также могут возникать критические случаи на малых модах и на больших модах. Построены уравнения, играющие роль нормализованных форм в этом случае, которые имеют такой же вид, как и в предыдущем пункте.

В 2.5 также предполагается, что интегральная часть (28) имеет вид (31), а $h = h_0 + \varepsilon h_1$. Оказывается, исследование динамики существенно зависит от алгебраических свойств числа h_0. Так, если h_0 иррационально, то провести построение нормализованной формы в критическом случае затруднительно. Если же h_0 рационально, то, как и выше, критические случаи бывают на больших и на малых модах. Приводятся соответствующие построения, во многом повторяющие построения пунктов 2.4 и 2.5.

В пункте 2.6 делаются некоторые замечания. Наиболее важным является то, что даже если в уравнении (28) параметр диффузии $\delta = 0$, то во многих случаях нормализованная форма все равно будет иметь вид краевой задачи параболического типа.

Третий параграф второй главы содержит исследование нелокальной динамики. Изучаются вопросы существования и устойчивости бегущих волн, т.е. решений вида

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}.$$

В пункте 3.1 разбирается случай фиксированного времени запаздывания. Исследуется, когда у уравнения (24) существует бегущая волна. Исследуется ее устойчивость. Подробно описывается простейший критический случай — аналог критического случая Андронова-Хопфа. Показано, что при некоторых условиях бегущая волна теряет устойчивость, и в ее окрестности рождается двумерный устойчивый тор.

В пункте 3.2 описывается случай большого запаздывания. Описываются пары z_0, ω, которые определяют бегущую волну уравнения (24), строятся некоторые необходимые условия устойчивости таких решений. Выделяются критические случаи, в них конструируются нормализованные формы, которые имеют вид параболических краевых задач с периодическими краевыми условиями.

В **заключении** кратко приводятся основные результаты и выводы.

В **Приложении А** описывается нелокальный метод построения решений уравнений с запаздыванием на примере уравнения Стюарта-Ландау.

В **Приложении Б** приводится расширение метода пограничных функций для построение асимптотики решений уравнений с запаздыванием.

Список публикаций по теме диссертации

[1] *Кащенко, И.С.* Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений с малым запаздыванием / И.С. Кащенко // Труды XXVI конференции молодых ученых механико-математического факультета им. Ломоносова. — Москва — 2004 — Т. 1. — С. 123.

[2] *Кащенко, И.С.* Алгоритм построения асимптотического разложения решений начальной задачи сингулярно возмущенного уравнения с малым запаздыванием / И.С. Кащенко // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2004 — Вып. 6. — С. 47 – 54.

[3] *Кащенко, И.С.* Локальная динамика уравнений первого порядка с большим запаздыванием / И.С. Кащенко // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к совеменным проблемам естествознания. II Международная конференция. — Обнинск 24-26.11.2004. — С. 45 – 46.

[4] *Кащенко, И.С.* Динамические свойства одного класса дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием / И.С. Кащенко // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2005 — Вып. 7. — С. 138 – 145.

[5] *Кащенко, И.С.* Нормализация системы с периодически распределенным запаздыванием / И.С. Кащенко // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — Москва, 2005. — С. 66.

[6] *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнения первого порядка с периодически распределенным запаздыванием / И.С. Кащенко // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы конференции. — Воронеж: ВГТА, 2005. — С. 113.

[7] *Кащенко И.С.* Нормализация в системе с периодически распределенным запаздыванием / И.С. Кащенко // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2005 — Вып. 8. — С. 83 – 97.

[8] *Кащенко, И.С.* Локальная динамика уравнений с периодически распределенным запаздыванием / И.С. Кащенко //Международная конференция „Тихонов и современная математика". — Москва, МГУ им.

М.В.Ломоносова, 19 - 25 июня 2006 г. — Тезисы докладов секции „Асимптотические методы“. — Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. — С. 58.

[9] *Кащенко, Д.С.* Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие / Д.С. Кащенко, И.С. Кащенко; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2006. — 132 с.

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.