На правах рукописи

Горбунов Игорь Анатольевич

Модальные квазинормальные логики без независимой аксиоматизации

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2006

Работа выполнена в **Тверском государственном университете**

Научный
руководитель **доктор физико-математических наук,**
профессор
Чагров Александр Васильевич

Официальные
оппоненты **доктор физико-математических наук,**
профессор
Захарьящев Михаил Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент
Дудаков Сергей Михайлович

Ведущая
организация **Красноярский государственный университет**

Защита состоится «___»____________2006 г., в___час. ___мин. на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Союзная, д. 144.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова.

Автореферат разослан «___»____________2006 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета С. И. Яблокова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В данной работе рассматриваются такие свойства модальных логик, как их независимая аксиоматизируемость и отсутствие у них независимой аксиоматизации.

Модальной логикой будем называть логику в языке классической пропозициональной логики, к связкам которого добавлена одноместная связка $\Box$, которая в естественных языках обычно соответствует модальностям «необходимо», «известно», «доказуемо» и т. п. Все рассматриваемые в диссертационной работе модальные логики содержат формулы вида $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ и все тавтологии классической логики. Правило подстановки и правило modus ponens принадлежат к постулированным для этих логик правилам вывода.

Множество формул Γ будем называть (*абсолютно*) *независимым в классе некоторых логик*, имеющих одинаковые множества правил вывода, если для любой формулы φ из Γ верно, что из множества $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ не выводима формула φ с использованием лишь постулированных в этом классе логик правил вывода. В том случае, когда класс логик фиксирован, такое можество формул будем называть *независимым*.

Логику будем называть (*абсолютно*) *независимо аксиоматизируемой*, если существует независимое множество формул, аксиоматизирующих эту логику при постулированных правилах вывода. В том случае, когда логика не является независимо аксиоматизируемой, будем называть её *логикой без независимой аксиоматизации*.

Множество формул Γ будем называть *независимым в классе некоторых логик над множеством формул* Δ, если для любой формулы φ из Γ верно, что из множества $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ не выводима формула φ с использованием лишь постулированных в этом классе логик правил вывода и формул из множества Δ.

Аксиоматизацию логики над некоторым непустым множеством формул будем называть *относительной аксиоматизацией*.

Задача о независимости системы аксиом — это одна из первых задач, возникших при становлении аксиоматического метода в математике. Чтобы оценить важность решения этой задачи, достаточно вспомнить о двухтысячелетней истории попыток доказательства пятого постулата из аксиоматики геометрии, приведённой в «Началах» Евклида. Независимость аксиоматизации означает наличие некоторого минимального (по включению) списка основных положений теории. Заметим, что для конечно аксиоматизируемых логик такой список всегда существует.

Открытие в 60-х годах прошлого века континуальности числа логик привело к тому, что перед исследователями встала задача изучения свойств бесконечных совокупностей логик и теорий. При этом большинство логик из изучаемых совокупностей обычно не имеют конечной аксиоматизации. Если логика или теория не имеет конечной аксиоматизации, и значит, аксиоматизируется бесконечным множеством аксиом, то её независимая аксиоматизируемость, так же, как и в конечном случае, позволяет утверждать, что для этой логики существует некоторое минимальное (по включению) множество аксиом. Однако в этом случае вполне закономерен вопрос о том, *всегда ли логика, не имеющая конечной аксиоматизации, имеет независимую аксиоматизацию*?

Вопрос о существовании пропозициональных логик без независимой аксиоматизации впервые был опубликован, видимо, А. И. Циткиным в [1] (проблема 148) для суперинтуиционистских логик. Сходный вопрос для эквациональных теорий был поставлен, например, в [22].

Вопрос о наличии логик и теорий без независимой аксиоматизации тесно связан с вопросом о существовании *аксиоматического базиса для данной совокупности логик и теорий* (аксиоматическим базисом называют независимое множество формул, позволяющих задавать любые теории или логики из интересующей нас их совокупности). Вопрос о наличии аксиоматических базисов исследовался для эквациональных и квазиэквациональных логик, а также в области универсальных алгебр. Полученные результаты изложены, в частности, в работах [4], [6], [7], [8], [9], [10], [17], [18], [19] и [22].

Сходный вопрос о базисах допустимых правил вывода в модальных логиках исследовался, например, в [20] и [5].

Если в данной совокупности теорий или логик существуют теории или логики, не имеющие независимой аксиоматизации, то в этом случае очевидно, что аксиоматический базис для данной совокупности логик или теорий отсутствует. Поэтому параллельно поиску аксиоматических базисов шёл поиск логик и теорий без независимой аксиоматизации. Так, И. А. Мальцевым в [19] был построен пример квазимногообразия, не имеющего независимой аксиоматизации. Пример конечной решётки, не имеющей независимого базиса тождеств, был построен В. И. Тумановым в [21]. Континуальное множество квазиэквациональных теорий без независимой аксиоматизации было построено А. В. Горбуновым в [17] и позднее И. А. Горбуновым в [11].

В области пропозициональных логик А. В. Чагровым и М. В. Захарьящевым в работе [2] были представлены суперинтуиционистская и нормальные модальные логики, не имеющие независимой аксиоматизации. (Модальную логику называем *нормальной*, если для неё постулировано правило вывода $\varphi/\Box\varphi$ — так называемое правило Гёделя.) Пример нормальной модальной логики без независимой аксиоматизации был также представлен М. Крахтом в [3].

В работе [2] в качестве частичного критерия отсутствия у построенных логик независимой аксиоматизации была использованна лемма, доказанная Ю. Г. Клейманом в [18] для эквациональных теорий групп. В [2] она была переформулированна для случая логик. Некоторые близкие по формулировке к лемме Ю. Г. Клеймана критерии отсутствия независимой аксиоматизации приведены А. В. Горбуновым в [17].

В силу критерия Клеймана, для того, чтобы доказать отсутствие у данной логики независимой аксиоматизации, достаточно показать, что она не имеет непосредственных предшественников по включению над некоторой конечно аксиоматизируемой своей подлогикой. Как известно, решётка нормальных расширений минимальной нормальной модальной логики **K** вкладывается в решётку её квазинормальных расширений. (Логику L называем *расширением логики* L_0, если $L_0 \subseteq L$. Модальную логику называем *квазинормальной*, если для неё не постулированно правило Гёделя.) Поэтому логика может не иметь непосредственных предшественников в некотором интервале решётки нормальных модальных логик, но иметь непосредственных предшественников в решётке квазинормальных модальных логик. Поскольку при построении в [2] примеров модальных логик, не имеющих независимой аксиоматизации, существенно использовалось правило Гёделя, а вопрос о квазинормальных предшественниках построенных логик не исследовался, то вопрос о наличии квазинормальных логик без независимой аксиоматизации был сформулирован в [2] в качестве открытого.

В качестве открытого вопроса в этой же работе сформулирован и вопрос об эквивалентности абсолютной независимой аксиоматизируемости логики и относительной независимой аксиоматизируемости логики над её конечно аксиоматизируемой подлогикой.

Кроме того, поскольку лемма Клеймана устанавливает взаимосвязь между отсутствием у данной логики свойства независимой аксиоматизируемости и отсутствием у этой логики непосредственных предшественников над некоторой конечно аксиоматизируемой логикой, то представляется вполне разумным рассмотреть вопрос о наличии непосредственных предшественников у логик без независимой аксиоматизации.

Среди модальных логик довольно большой интерес вызывают так называемые логики доказуемости (имеется в виду предикат доказуемости в фомальной арифметике), к которым относятся, например, логика Гёделя–Лёба **GL** и логика Соловая **S**, причём логика Соловая является существенно квазинормальной модальной логикой (т. е. в результате замыкания этой логики относительно правила Гёделя получается противоречивая логика). Таким образом, представляется вполне естественным решать вопросы, поставленные в [2], в первую очередь для расширений этих логик.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертационной работы является решение вопроса о существовании в решётке квазинормальных расширений логики **K** логик без независимой аксиоматизации, а также оценка числа таких логик. Выбор в качестве объектов исследования расширений логик доказуемости **GL** и **S** отчасти объясняется тем, что, в связи с особой ролью арифметики, это одни из наиболее важных и интересных модальных логик.

Методы исследования. В работе используются семантические и синтаксические методы теории модальных логик.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные новые результаты:

- доказано, что абсолютная независимая аксиоматизируемость логики эквивалентна относительной независимой аксиоматизируемости над некоторой её конечно аксиоматизируемой подлогикой;
- в расширениях логики **GL** построено счётное множество нормализуемых[1] квазинормальных логик без независимой аксиоматизации;
- построено счётное множество логик без независимой аксиоматизации в расширениях логики **S**;
- показано, что логики без независимой аксиоматизации могут иметь непосредственных предшественников над некоторыми конечно аксиоматизируемыми логиками.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования, разработанные в данной диссертационной работе, могут найти применение в исследованиях свойств неклассических логик[2], а также могут быть полезны специалистам, работающим в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Новосибирском государственном университете, Тверском государственном университете, Красноярском государственом университете и др.

[1] Будем говорить, что квазинормальная логика *нормализуема* (или *допускает нормализацию*), если при замыкании её относительно правила Гёделя получаем непротиворечивую логику.

[2] См., например, [15], [16].

Апробация. По результатам диссертации делались доклады на семинаре по математической логике Тверского госуниверситета (2001, 2002 гг.), на научной конференции «Российской математике — триста лет» (2002 г., Тверь), на 3-ей (2001 г.) и 4-ой (2003 г.) международных конференциях «Смирновские чтения» (Москва).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [12], [13], и [14]. Кроме того, в [11] представлены результаты, близкие к теме диссертации (касающиеся не логик, а квазимногообразий). С помощью разработанных в диссертации методов получены результаты, представленные в [15] и [16] (сами эти результаты не имеют прямого отношения к теме диссертации).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и библиографического списка, включающего 23 наименования. Объём работы — 81 страница.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, указываются методы исследования. Описываются основные результаты работы и даётся обзор всех разделов диссертации.

В **первой главе** приводятся основные определения. Определяется синтаксис используемого модального языка и даётся определение квазинормальных модальных логик. Определяется реляционная семантика для рассматриваемого класса логик. Вводятся необходимые понятия, в частности, определяется понятие независимой аксиоматизации, приводится критерий независимой аксиоматизируемости.

Во **второй главе** представлены результаты, носящие в данной работе вспомогательный характер. Выделение этих результатов в самотоятельную главу связано с тем, что необходимость отсылки к ним возникает в процессе доказательтва многих основных результатов.

Некоторые из вспомогательных результатов имеют и самостоятельный интерес. В частности, на открытый вопрос, поставленный в [2], отвечает

Теорема 2.1.1 *Если L — независимо аксиоматизируемая логика и L_0 — её конечно аксиоматизируемая подлогика, то L независимо аксиоматизируема над L_0.*

Из этой теоремы и леммы 2.1 из [2] следует, что относительная независимая аксиоматизируемость над некоторой конечно аксиоматизируемой логикой эквивалентна абсолютной независимой аксиоматизируемости.

В этой же главе приводятся и доказательства тех необходимых «фольклорных» фактов, для которых диссертант не нашёл доказательств в изученной литературе.

В разделе **2.1** этой главы рассматриваются синтаксические аспекты независимой аксиоматизируемости; в разделе **2.2** рассматриваются необходимые свойства конечных множеств в рафинированных шкалах; в разделе **2.3** вводится понятие иррефлексивного слоя в обобщённых шкалах и рассматриваются свойства слоёв; в разделе **2.5** приводятся семантические эквиваленты формул, используемых для задания логик в третьей главе; в разделе **2.6** вводится понятие редукции и рассматриваются некоторые необходимые в дальнейшем её свойства.

В **третьей главе** строятся примеры квазинормальных модальных логик, не имеющих абсолютной независимой аксиоматизации в расширениях логик **GL** и **S**, строится счётные множества логик без независимой аксиоматизации, а также рассматривается некоторое свойство решёток логик.

Для формулировки основных результатов третьей главы нам понадобятся следующие определения.

Будем говорить, что квазинормальная модальная логика *допускает нормализацию*, если при её замыкании относительно правила Гёделя получается непротиворечивая логика. В противном случае говорим, что логика является *существенно квазинормальной.*

Основные результаты третьей главы сформулированны в следующих утверждениях.

Теорема 3.2.1 *В расширениях логики* **GL** *существует счётное множество допускающих нормализацию квазинормальных логик, не имеющих независимой аксиоматизации.*

Теорема 3.3.1 *В расширениях логики* **S** *существует счётное множество существенно квазинормальных логик, не имеющих независимой аксиоматизации.*

Теорема 3.4.1 *Существуют логики без независимой аксиоматизации, у которых имеются непосредственные предшественники в интервалах, начинающихся с логик, имеющих конечную аксиоматизацию.*

Доказательства этих теорем изложены в разделах **3.2**, **3.3** и **3.4** соответственно. В разделе **3.1** этой главы описывается некоторый способ построения интервалов логик, верхняя граница каждого из которых не имеет непосредственных предшественников.

Литература

[1] *Логическая тетрадь* // Новосибирск., 1986.

[2] Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V. *On the Independent Axiomatizability of Modal and Intermediate Logics* // Jornal Logic Computat., vol. 5, No. 3, 1995, p. 287–302.

[3] Kracht M. *Tools and Techniques in Modal Logic* // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, No. 142, Elsevier, Amsterdam, 1999.

[4] McKenzie R. *Equation bases for lattice theories* // Math. Scand., No. 27, 1970, p. 24–38.

[5] Rybakov V., Kiyatkin V., Terziler M. *Independent Bases for Rules Admissible in Pretabular Logics* // Logic Jornal of the IGPL., vol. 7, No. 2, 1999, p. 253–266.

[6] Белкин В. П. *О квазитождествах некоторых конечных алгебр* // Математические заметки, т. 22, N 3, 1977, с. 335–338.

[7] Белкин В. П. *Квазитождества конечных колец и решёток* // Алгебра и логика, т. 17, N 3, 1978, с. 247–259.

[8] Будкин А. И. *Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп* // Математические заметки, т. 31, N 6, 1982, с. 817–826.

[9] Будкин А. И. *Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий обобщённо разрешимых групп* // Алгебра и логика, т. 25, N 3, 1986, с. 249–266.

[10] Будкин А.И. *Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий универсальных алгебр* // Математические заметки, т. 56, N 4, 1994, с. 28–37.

[11] Горбунов И. А. *О квазимногообразиях, не имеющих независимого базиса* // Учёные записки Тверского государственного университета, т. 6. Тверь, Издательство Тверского госуниверситета, 2000, с. 13–17.

[12] Горбунов И. А. *О независимой аксиоматизируемости квазинормальных модальных логик* // Смирновские чтения. III Международная конференция. М., Издательство Института философии РАН, 2001, с. 29–31.

[13] Горбунов И. А. *О логиках и теориях не имеющих независимых аксиоматизаций* // Российской математике — триста лет. Материалы юбилейной научной конференции 24–25 октября 2001 года. Тверь, Издательство Тверского госуниверситета, 2002, с. 95–102.

[14] Горбунов И. А. *О независимой аксиоматизируемости расширений логики Р. Соловая* // Смирновские чтения. IV Международная конференция. М., Издательство Института философии РАН, 2003, с. 31–32.

[15] Горбунов И. А. *Разрешимое расширение логики доказуемости, не разрешимое в конечном* // Международная конференция «Колмогоров и соверменная математика» М., Издательство МГУ, 2003, с. 704–705.

[16] Горбунов И. А. *A Decidable Modal Logic that is Undecidable on Finite Frames* // Международная конференция «Computer

Science Applications of Modal Logic» М., Издательство МЦНМО, 2005, с. 15–15.

[17] Горбунов А. В. *Алгебраическая теория квазимногообразий* // Новосибирск., Научная книга, 1999.

[18] Клейман Ю. Г. *О некоторых вопросах теории многообразий групп* // Известия АН СССР. Сер. матем., т. 47, 1983, с. 37–74.

[19] Мальцев А. И. *Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей* // Сибирский математический журнал., т. VIII, N 5, 1968, с. 1005–1014.

[20] Рыбаков В. В. *Базисы допустимых правил вывода S4 и Int* // Алгебра и логика, т. 24, 1985, с. 55–68.

[21] Туманов В. И. *О конечных ришётках,не имеющих независимого базиса квазитождеств* // Математические заметки, т. 36, N 5, 1984, с. 625–633.

[22] Янов Ю. И. *Тождества в конечных алгебрах* // Проблемы кибернетики, N 8, 1962, с. 75–87.