На правах рукописи

Максименко Александр Николаевич

ГРАФЫ МНОГОГРАННИКОВ И СВОДИМОСТЬ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

специальность 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ярославль - 2004

Работа выполнена в Ярославском государственном университете им. П.Г.Демидова

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Бондаренко Владимир Александрович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гришухин Вячеслав Петрович,
	кандидат физико-математических наук, профессор Соколов Валерий Анатольевич.
Ведущая организация	Институт проблем передачи информации РАН.

Защита состоится "____" ________ 2004 года в ____ часов на заседании диссертационного совета К 212.002.06 при Ярославском государственном университете им. П.Г.Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д.14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан "____" ____________ 2004 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Задачи дискретной оптимизации (ЗДО) имеют широчайшую область приложений — от экономики до квантовой физики. Среди множества всех таких задач особый интерес вызывают задачи комбинаторной оптимизации (ЗКО). Их главное отличие от остальных ЗДО состоит в том, что число возможных (допустимых) решений растет экспоненциально относительно размерности задачи. Поэтому решение этих задач с помощью простого перебора всех возможных вариантов не только представляется нецелесообразным, но и, при большой размерности задачи, оказывается практически невозможным.

Так появляется проблема поиска решающих такие задачи алгоритмов, существенно более эффективных, чем полный перебор вариантов (хорошим считается алгоритм с полиномиальной относительно размерности задачи трудоемкостью). На необходимость решения этой проблемы указывает тот факт, что для большинства известных ЗКО (а это тысячи различных задач) эффективные алгоритмы до сих пор не найдены. В связи с этим важной оказывается проблема выявления причин труднорешаемости задач.

В диссертации упоминаются две принципиально различные точки зрения на эту проблему, которые, тем не менее, в целом совпадают в своих выводах. Одна точка зрения принадлежит классической теории сводимости задач, развитой в работах С. Кука, Р. Карпа, Л. Левина (см. монографию Гэри М. и Джонсона Д. "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи"). Эта теория предоставляет простой инструмент для сравнения задач по их сложности, избегая непосредственного анализа характеристик задач. Главное достижение этой теории состоит в том, что с ее помощью удается достаточно просто показать, что большинство известных труднорешаемых задач оказываются в определенном смысле самыми сложными.

С другой стороны, в настоящее время активно ведутся исследования геометрических конструкций, ассоциированных с ЗКО и решающими эти задачи алгоритмами. В частности, наибольшее внимание уделяется изучению свойств многогранников задач. В этой связи отметим работы Белова Ю.А., Бондаренко В.А., Гришухина В.П., Деза М.М., Емеличева В.А., Емець О.О., Исаченко А.Н., Ковалева М.М., Кравцова М.К., Леонтьева В.К., Лоран М., Пападимитриу Х., Симанчева Р.Ю. Интерес к многогранникам задач комбинаторной оптимизации обусловлен прежде всего тем, что для произвольной задачи ее многогранник строится достаточно простым и естественным образом. Как показывает опыт многих исследователей, комбинаторные характеристики многогранника являются характеристиками сложности соответсвующей задачи в том или ином классе алгоритмов. В частности, из работ Бондаренко В.А. известно, что плотность графа многогранника является нижней оценкой сложности задачи в широком классе алгоритмов, включающем в себя известные методы комбинаторной оптимизации. Такой, "геометрический" подход, в отличие от классической теории сводимости, позволяет оценить сложность задачи числом. Главное препятствие для развития этого перспективного направления состоит в принципиальной сложности вычисления характеристик многогранников. На это указывает, например, результат Пападимитриу Х. о том, что проблема распознавания смежности вершин многогранника задачи коммивояжера является NP-полной.

Цель работы состоит в изучении причинно-следственной связи, благодаря которой теория сводимости предсказывает многие современные результаты, связанные с исследованием свойств графов многогранников задач комбинаторной оптимизации. С одной стороны, искомая связь укрепляет позиции теории сводимости тем фактом, что графы многогранников труднорешаемых (с точки зрения этой теории) задач оказываются, как правило, сложно устроенными. С другой стороны, эта связь позволяет при исследовании графов многогранников пользоваться простыми и надежными методами теории сводимости задач.

Методы исследования. При решении поставленных задач использовались методы теории сводимости задач, методы комбинаторного анализа, методы выпуклого анализа, в частности, теории выпуклых многогранников.

Научная новизна. В работе вводится новый тип сводимости, характерный для задач комбинаторной оптимизации, — так называемая аффинная сводимость. Эта сводимость обладает рядом специфических свойств. С одной стороны она является модификацией классического понятия сводимости задач распознавания. С другой стороны, представляет собой инструмент для сравнения графовых характеристик многогранников задач, избегая непосредственного их вычисления. Используя этот новый тип сводимости, в работе вычисляются экспоненциальные нижние оценки плотности графов многогранников таких задач комбинаторной оптимизации, как максимальная 2-ВЫП, РАЗРЕЗ, 3-СОЧЕТАНИЕ, РЮКЗАК, КОММИВОЯЖЕР, ДЛИННЕЙШИЙ ПУТЬ. Указанный подход позволяет также найти квадратичную нижнюю оценку плотности графов многогранников задачи о назначениях и задачи о паросочетаниях.

Кроме того, понятие графа многогранника обобщается на частные случаи задач, когда на множество исходных данных задачи накладываются линейные ограничения. Новое понятие дает возможность изучать комбинаторно-геометрические характеристики сложности для важных частных случаев задач. Наиболее ярким примером здесь служит задача о кратчайшем пути, полиномиально разрешимая при условии неотрицательности длин ребер (дуг) и труднорешаемая при отсутствии такого ограничения.

Практическая ценность работы. Полученные результаты имеют в основном теоретический характер.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных конференциях:

1) I Международная научно-практическая конференция (заочная) "Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования". (Тамбов: ТГУ, 2003 год);

2) IV Международная школа-семинар, посвященная 100-летию

со дня рождения академика А.Н. Колмогорова "Профессионализация предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе." (Ярославль: ЯГПУ, 2003 год);

3) Всероссийская научная конференция, посвященная 200-летию ЯрГУ им. П.Г. Демидова. (Ярославль: ЯрГУ, 2003 год).

Публикации. По результатам исследований было опубликовано 6 печатных работ: 3 статьи и 3 тезиса докладов. Основные результаты вошли в отчеты по грантам РФФИ за 2002 и 2003 гг.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 67 наименований. Текст диссертации включает в себя 4 иллюстрирующих рисунка. Общий объем диссертации - 92 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Текст **введения** можно условно разделить на две половины. Значительная часть первой половины посвящена обсуждению специфики задач комбинаторной оптимизации. Далее внимание акцентируется на проблеме поиска причин труднорешаемости задач такого типа. Приводятся две точки зрения: теория эффективной (полиномиальной) сводимости задач и так называемый "геометрический" подход. Указывается на то, что "геометрический" подход прежде всего связан с изучением комбинаторно-геометрических свойств многогранников задач. Далее во введении проводится краткий сравнительный анализ этих точек зрения и указывается на необходимость изучения взаимосвязи между ними.

Вторая половина введения посвящена ознакомлению с направлением и методами исследований настоящей диссертации, основными идеями работы. Здесь же приводится краткое содержание работы по главам.

Первая глава состоит из двух разделов. Название первого раздела, — некоторые сведения из теории сводимости задач. Здесь прежде всего приводятся основная идея и метод исследований классической теории сводимости. Упоминается о том, что эта теория работает прежде всего с задачами распознавания. В качестве примера приводится алгоритм сведения задачи КОММИВОЯЖЕР к задаче о длиннейшем пути. Проводится сравнительный (по сложности) анализ двух задач:

1) Задача оптимизации: Найти аргумент $x \in X$ целевой функции $c(x)$ на котором она достигает свое максимальное значение.

2) Задача распознавания: Определить, существует ли такой аргумент $x \in X$, при котором целевая функция $c(x)$ принимает значение, не меньшее некоторого, наперед заданного числа C: $c(x) \geq C$; и если существует, то указать такой аргумент.

Далее внимание читателя обращается на тот факт, что для задач оптимизации тоже можно построить аналогичную теорию сводимости. И в качестве примера приводится алгоритм сведения оптимизационной задачи КОММИВОЯЖЕР к задаче о длиннейшем пути.

Второй раздел называется "Многогранники задач". Начинается этот раздел с описания многогранника задачи КОММИВОЯЖЕР. Пусть $G(V, E)$ — полный реберно взвешенный граф на n вершинах, в котором требуется найти гамильтонов цикл максимальной длины. Рассмотрим множество $\tilde{X}_n$ всех гамильтоновых циклов в этом графе. Это множество еще называют *множеством допустимых решений* задачи. Интерпретируем множество $\tilde{X}_n$ как множество точек в евклидовом пространстве R^m. Для этого положим $m = |E| = \frac{n(n-1)}{2}$ и каждому ребру $e_{ij} \in E$ поставим в соответствие координату x_{ij} произвольной точки $x = (x_{ij}) \in R^m$. Теперь для каждого цикла $\tilde{x} \in \tilde{X}_n$ рассмотрим его характеристический вектор $x = (x_{ij}) \in R^m$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad e_{ij} \in \tilde{x}, \\ 0, & \text{если} \quad e_{ij} \notin \tilde{x}. \end{cases}$$

Обозначим через X_n множество всех таких векторов и многогранником $M(X_n)$ задачи X_n назовем выпуклую оболочку, натянутую на множество X_n.

Далее рассматриваются два направления в изучении свойств многогранников задач. С одной стороны, понятие многогранника позволяет задачу комбинаторной оптимизации (ЗКО) сформулировать как задачу линейного программирования. И мерой сложности здесь естественным образом становится число фасет многогранника задачи. Другое направление прежде всего связано с исследованием комбинаторных свойств графа многогранника и использованием их как характеристик сложности соответствующей задачи в определенном классе алгоритмов. В связи с этим тут же приводится определение графа многогранника, как совокупности его вершин и ребер. Сложность задач обычно связывается с такими характеристиками графов многогранников как степени вершин, диаметр, высота графа и т. д. Но наиболее приемлемой из известных в настоящее время характеристик является плотность графа, или максимальное число его вершин, любые две из которых смежны. В связи с этим упоминается ряд результатов, связанных с вычислением плотности графов многогранников для различных задач комбинаторной оптимизации. И в заключение раздела отмечается общеизвестный факт о том, что изучение свойств многогранников задач обычно сопряжено с серьезными трудностями.

Во **второй главе** подробно излагаются основные идеи предлагаемого в работе подхода к изучению свойств графов многогранников задач. Она разбита на два раздела.

Первый носит название "Конусное разбиение" и начинается с определения. Пусть $X \subset R^m$ — множество допустимых решений некоторой массовой задачи на максимум. Для каждого $x \in X$ рассмотрим множество

$$K(x) = \{c \in R^m : (c, x) \geq (c, y) \text{ для любого } y \in X\}.$$

$K(x)$ представляет собой выпуклый многогранный конус. Совокупность всех $K(x)$, где $x \in X$, называется *конусным разбиением* пространства R^m исходных данных по множеству X. Известно, что конусное разбиение и многогранник задачи являются двойственными структурами. Вследствие этого граф $G(X)$ многогранника $M(X)$ будем также называть *графом конусного разбиения* пространства R^m по множеству X. В то же время граф конусного разбиения представляет собой более гибкий инструмент для изучения характеристик задачи, чем граф ее многогранника. Дело в том, что многогранник удается построить лишь для задачи без дополнительных ограничений, тогда как свойства конусного разбиения можно исследовать и для тех частных случаев, когда на множество исходных данных задачи накладываются линейные ограничения. И в качестве примера здесь рассматривается задача о кратчайшем пути, для которой обычно вводят ограничение на неотрицательность длин ребер (дуг).

Формальное определение возникающего в связи с этим нового понятия выглядит следующим образом. Рассмотрим частный случай задачи $X \subset R^m$ дискретной оптимизации, когда множество исходных данных представляет собой многогранное множество (полиэдр) $S \subset R^m$ (причем S может быть и меньшей размерности, чем R^m). Будем обозначать такую массовую задачу (X, S). В этом случае многогранное разбиение множества S по множеству X образуется полиэдрами $K(x, S) = K(x) \cap S$, где $x \in X$. Граф $G_S(X)$ такого многогранного разбиения определим по аналогии с графом конусного разбиения всего пространства R^m:

Определение. *Полиэдр $K(x, S)$, где $x \in X$, образует вершину графа $G_S(X)$, если найдется вектор исходных данных $s \in S$ такой, что x является единственным оптимальным решением индивидуальной задачи $[X, s]$.*

Определение. *Вершины графа $G_S(X)$, соответствующие полиэдрам $K(x, S)$ и $K(y, S)$, соединены ребром, если найдется такой вектор $s \in S$, что для каждого $z \in X$ отличного от x и от y, выполнено $(x, s) = (y, s) > (z, s)$. В таком случае будем говорить, что полиэдры $K(x, S)$ и $K(y, S)$ смежны.*

Свойство. *Граф $G_S(X)$ является подграфом графа $G(X)$. Обозначение: $G_S(X) \prec G(X)$.*

Рассмотрим важный пример, когда $S = Q_m = \{x \in R^m : -1 \leq x_i \leq 1,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$ — куб с длиной ребра, равной 2, и центром в начале координат.

Теорема. *Пусть $X \subset R^m$, $X = \operatorname{ext} M(X)$ и $Q = Q_m$, тогда $G_Q(X) = G(X)$.*

Второй раздел этой главы носит название "Аффинная сводимость". В начале этого раздела указываются некоторые особенности сведения задач комбинаторной оптимизации, послужившие причиной для появления нового понятия.

Определение. *Будем говорить, что задача (X, S) для многогранного множества исходных данных $S \subseteq R^m$ аффинно сводится к задаче $Y = (Y, R^n)$, где $m \leq n$, если найдутся*

1) невырожденное аффинное отображение $A : S \to T$, дей-

ствующее взаимно-однозначно из S в некоторое многогранное множество $T \subseteq R^n$ (В данном случае аффинное отображение можно задать формулой $t = A(s) = Ks + d$, где $t \in T$, $s \in S$, $d \in R^n$ и K — матрица размера $n \times m$, причем $\operatorname{rang} K = m$),

2) и взаимно-однозначное соответствие $B : X \to Y'$ между множеством X и некоторым подмножеством $Y' \subseteq Y$

такие, что для каждого вектора $s \in S$ выполнено следующее условие:

y_0 является решением задачи $[Y, A(s)]$, тогда и только тогда, когда $y_0 \in Y'$ и $x_0 = B^{-1}(y_0)$ — решение задачи $[X, s]$.

Для таких задач введем обозначение: $(X, S) \propto_A Y$.

Теорема. *Пусть $(X, S) \propto_A Y$ и $A : S \to T$, тогда $G_S(X) = G_T(Y) \prec G(Y)$.*

Следствие. *Пусть $(X, Q_m) \propto_A Y$, тогда $G(X) \prec G(Y)$.*

Следствие. *Пусть $(X, Q_m) \propto_A Y$, тогда $p(X) \leq p(Y)$, где $p()$ – плотность графа соответствующего многогранника.*

С целью пояснения сути сформулированных утверждений тут же приводится следующий факт. Оказывается, оптимизационная задача КОММИВОЯЖЕР $(\mathcal{H}_n, Q)$, веса ребер которой могут принимать значения из отрезка $[-1, 1]$, аффинно сводится к задаче о длиннейшем пути $\mathcal{L}_{n+1}$. Обозначаем $(\mathcal{H}_n, Q) \propto_A \mathcal{L}_{n+1}$. И, опираясь на только что сформулированные свойства аффинной сводимости, получаем следующие утверждения.

Теорема. *Граф $G(\mathcal{H}_n)$ многогранника задачи коммивояжера изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{L}_{n+1})$ многогранника задачи о длиннейшем пути.*

Следствие. *Плотность $p(\mathcal{H}_n)$ графа многогранника $M(\mathcal{H}_n)$ не превосходит по своей величине плотности $p(\mathcal{L}_{n+1})$ графа многогранника $M(\mathcal{L}_{n+1})$.*

Таким образом, пользуясь понятием аффиной сводимости и не прибегая к непосредственному вычислению характеристик многогранников задач удалось показать, что граф многогранника задачи о длиннейшем пути конструктивно сложнее графа многогранника задачи коммивояжера.

Как видим, аффинная сводимость лишь позволяет установить соотношения между комбинаторными характеристиками графов многогранников задач, но не вычисляет их. Таким образом, как и в классической теории сводимости, в начале требуется непосредственно оценить характеристику сложности (плотность графа многогранника) наиболее простой для изучения задачи, например задачи КЛИКА. После этого, для того чтобы показать, что некоторая задача имеет экспоненциальную характеристику сложности в классе прямых алгоритмов, достаточно будет привести алгоритм, аффинно сводящий задачу КЛИКА к данной.

В **третьей**, наиболее емкой главе приводятся многочисленные "экспериментальные данные", подтверждающие работоспособность предлагаемого подхода. Глава начинается с непосредственного изучения свойств многогранника "основной" задачи — оптимизационной задачи КЛИКА. Доказывается, что плотность графа этого многогранника совпадает с числом вершин и равна 2^n.

Дальнейшее развитие исследований происходит по классическому сценарию. Конструируется алгоритм сведения "основной" задачи к "еще не изученной" задаче и доказывается, что он удовлетворяет условиям аффинности. Таким образом пополняется список задач с экспоненциальной плотностью полиэдрального графа. Процесс пополнения этого списка существенно облегчается за счет схожести оптимизационных задач и задач распознавания. Это позволяет при конструировании алгоритмов сведения оптимизационных задач пользоваться идеями алгоритмов сведения задач распознавания, известными из классической теории сводимости. Тем не менее, некоторые алгоритмы аффинной сводимости в настоящей работе предложены впервые.

Структуру этой главы удобно изобразить в виде ориентированного дерева (см. рис. 1). Каждая стрелка на рисунке символизирует алгоритм, сводящий задачу, расположенную в начале стрелки, к задаче, находящейся в конце. В корне дерева располо-

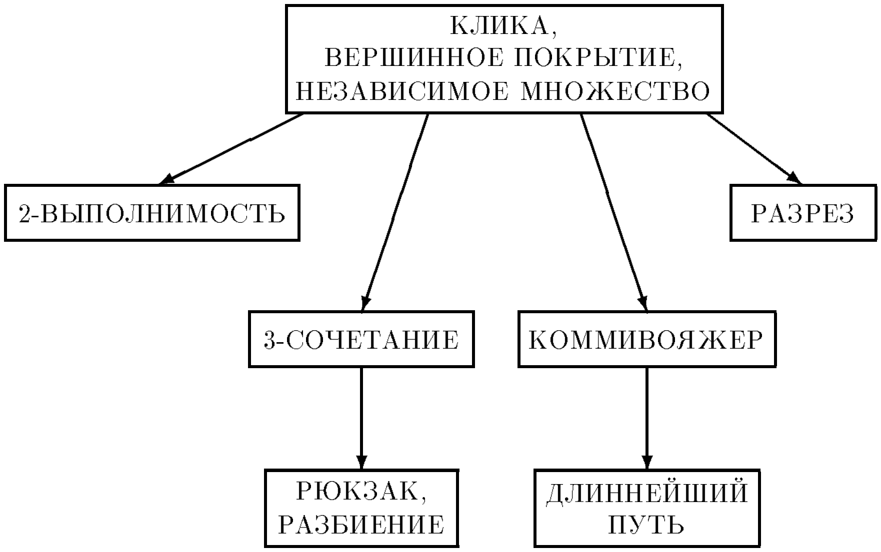

Рис. 1. Диаграмма сведения труднорешаемых задач.

жена "основная" задача КЛИКА.

В список исследуемых задач вошли наиболее известные классические задачи. В их числе оптимизационные варианты пяти из шести задач, фигурирующих в монографии Гэри М. и Джонсона Д. "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи" в качестве основных NP-полных задач.

Приведем здесь лишь новые результаты, принадлежащие автору работы.

Следствие. *Граф $G(\mathcal{C}_n)$ многогранника задачи КЛИКА изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{T}_m)$ многогранника задачи 3-СОЧЕТАНИЕ, где $m = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Следствие. *Плотность $p(\mathcal{T}_m)$ графа многогранника $M(\mathcal{T}_m)$ задачи трехмерное сочетание оценивается снизу экспоненциальной величиной:*

$$p(\mathcal{T}_m) > 2^{\sqrt{2m}-3/2}.$$

Теорема. *Граф $G(\mathcal{T}_n)$ многогранника задачи 3-СОЧЕТАНИЕ изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{K}_m^\tau)$, где $m = n^3 + 2$, многогранника задачи о рюкзаке с вектором размеров τ и размером рюкзака, равным половине суммарного размера предметов.*

Следствие. *Плотность $p(\mathcal{K}_m^\tau)$ графа многогранника задачи о рюкзаке для m $(m > 2)$ предметов экспоненциальна:*

$$p(\mathcal{K}_m^\tau) > 2^{(\sqrt[6]{m-2}-5)/2}.$$

Следствие. *Плотность графа конусного разбиения для задачи РАЗБИЕНИЕ оценивется снизу величиной $2^{(\sqrt[6]{m-2}-5)/2}$, где m — размерность задачи.*

Следствие. *Граф $G(\mathcal{C}_n)$ многогранника задачи КЛИКА изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{H}'_k)$, где $k = 2n^2 - n$, многогранника задачи гамильтонов контур.*

В частности, учитывая, что плотность полиэдрального графа задачи КЛИКА равна 2^n, получаем экспоненциальную нижнюю оценку плотности полиэдрального графа для несимметричной задачи коммивояжера на k вершинах:

$$p(\mathcal{H}'_k) > 2^{\sqrt{k/2}-1}.$$

Следствие. *Граф $G(\mathcal{H}'_k)$ многогранника задачи гамильтонов контур изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{H}_n)$ многогранника задачи гамильтонов цикл, где $n = 2k$.*

И получаем экспоненциальную нижнюю оценку плотности полиэдрального графа для задачи гамильтонов цикл на n вершинах:

$$p(\mathcal{H}_n) > 2^{\sqrt{n}/2-2}.$$

Следствие. *Граф $G(\mathcal{H}_n)$ многогранника задачи гамильтонов цикл в точности совпадает с графом $G_\Delta(\mathcal{H}_n)$ конусного разбиения задачи коммивояжера с условием "неравенство треугольника".*

Следствие. *Плотность полиэдрального графа задачи ДЛИННЕЙШАЯ ЦЕПЬ на n вершинах экспоненциальна:*

$$p(\mathcal{L}_n) > 2^{\sqrt{n-1}/2-2}.$$

Следствие. *Граф $G(\mathcal{H}'_{n-1})$ многогранника задачи гамильтонов контур изоморфен некоторому подграфу графа $G(\mathcal{L}'_n)$ многогранника задачи о длиннейшем пути.*

И получаем

$$p(\mathcal{L}'_n) > 2^{\sqrt{(n-1)/2}-1}.$$

В **четвертой главе** изучаются комбинаторно-геометричекие свойства полиномиально разрешимых задач: задачи о кратчайшем пути, задачи о назначениях и задачи о паросочетаниях в произвольном графе. Для графа конусного разбиения задачи о кратчайшем пути с ограничением на неотрицательность длин контуров значение плотности вычисляется непосредственно и оказывается равным k^2, при $n = 2k$ и $k(k+1)$, при $n = 2k+1$, где n — число городов. Далее показывается, что эта задача аффинно сводится к задаче о назначениях, что позволяет оценить снизу плотность графа многогранника последней задачи и задачи о паросочетаниях.

Теорема. *Для плотностей $p(\mathcal{A}_n)$ и $p(\mathcal{M}_n)$ графов многогранников задачи о назначениях и задачи о паросочетаниях в произвольном графе выполнены неравенства*

$$p(\mathcal{M}_n) \geq p(\mathcal{A}_n) \geq \left[\frac{(n+1)^2}{4}\right],$$

где [ ] — операция выделения целой части числа.

Список исследуемых в работе задач достаточно представителен. Таким образом, полученные результаты позволяют существенно облегчить изучение свойств графов многогранников задач и открывают новые перспективы для исследований.

И, наконец, в **заключении** подводятся итоги диссертационного исследования, проводится сравнительный анализ с уже известными результатами, формулируются несколько интересных гипотез, требующих для своего решения более внимательного изучения феномена аффинной сводимости.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В работе изучена взаимосвязь между двумя подходами к изучению причин труднорешаемости задач комбинаторной оптимизации. А именно, предлагается новый способ исследования свойств графов многогранников задач, основанный на использовании идей классической теории сводимости задач. Этот подход позволяет сравнивать характеристики графов многогранников задач, не прибегая к их непосредственному вычислению. В рамках этого подхода удается вычислить экспоненциальные нижние оценки плотности для ряда широко известных труднорешаемых задач. Кроме того, удается найти квадратичную нижнюю оценку плотности для графа многогранника задачи о назначениях.

Впервые поставлена и решена задача изучения графовых характеристик для многогранника задачи РЮКЗАК. Обнаружена возможность изучения комбинаторно-геометрических характеристик сложности для задач с различными линейными ограничениями на множество исходных данных. В числе таких задач изучена задача о кратчайшем пути с ограничением на неотрицательность длин контуров.

Решение поставленных задач опирается на известные достижения классической теории сводимости задач, а также на свойства двойственной к многограннику задачи конструкции — конусного разбиения пространства исходных данных. А именно, с учетом специфики задач оптимизации, модифицируется классическое понятие сводимости. Кроме того, изучаются свойства конусного (многогранного) разбиения для части пространства исходных данных.

Полученные решения существенно облегчают процесс изучения свойств графов многогранников, позволяя пользоваться аппаратом классической теории сводимости задач. Изученная в работе взаимосвязь между теорией сводимости и современными исследованиями многогранников задач позволяет содержательно объединить эти два ранее не связанных подхода.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1) Максименко А.Н. Нижняя оценка плотности графа многогранника задачи о паросочетаниях // Современные проблемы математики и информатики: Сб. науч. трудов. Вып. 4. Ярославль: ЯрГУ. 2001. С. 157–161.

2) Максименко А.Н. Нижняя оценка плотности графа многогранника задачи о паросочетаниях // Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования: Материалы 1-й международной научно-практической конференции (заочной). Тамбов: ТГУ им. Г.Р. Державина. 2003. С. 162–164.

3) Максименко А.Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Ярославль: ЯГПУ. 2003. С. 15–17.

4) Максименко А.Н. Сводимость задач дискретной оптимизации и соотношение плотностей их полиэдральных графов // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль: ЯрГУ. 2003. Т. 10. №2. С. 3–10.

5) Максименко А.Н. Сложность задачи о кратчайшем пути и комбинаторные свойства ее многогранника // Материалы всероссийской научной конференции, посвященной 200-летию ЯрГУ им. П.Г. Демидова. Информатика и вычислительная техника. Ярославль: ЯрГУ. 2003. С. 54–56.

6) Максименко А.Н. Многогранник задачи о рюкзаке // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: Сб. науч. тр. Ярославль: ЯрГУ. 2003. С. 163–172.