На правах рукописи

Николаев Андрей Валерьевич

СВОЙСТВА ВЕРШИН РЕЛАКСАЦИЙ РАЗРЕЗНОГО МНОГОГРАННИКА

Специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРЕАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2011

Работа выполнена на кафедре дискретного анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Бондаренко Владимир Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Дольников Владимир Леонидович

кандидат физико-математических наук Гарбер Алексей Игоревич

Ведущая организация – Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Защита диссертации состоится «16» декабря 2011 года в 14 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150003, г. Ярославль, Полушкина роща д.1.

Автореферат разослан «10» ноября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета С.И. Яблокова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Одной из основных задач прикладной математики является задача дискретной оптимизации, которая заключается в выборе наилучшего варианта из некоторого конечного набора дискретных альтернатив. Примерами таких задач являются: поиск кратчайшего пути в графе, задача о рюкзаке, оптимальное назначение работников на должности, нахождение минимального остовного дерева, задача коммивояжера. Область применения оптимизационных алгоритмов безгранична: механика и инженерное дело, практически вся экономическая теория, исследование операций и теория управления, криптография, а также многие и многие другие направления.

Наиболее простым методом решения подобных задач является полный перебор всех возможных альтернатив. Однако зачастую в задачах дискретной оптимизации множество вариантов не задается напрямую. Так, например, в задаче коммивояжера исходными данными являются города и расстояния между ними, а множество возможных маршрутов возникает опосредованно. При этом происходит так называемый «экспоненциальный взрыв» и количество вариантов растет экспоненциально быстро в зависимости от входных данных, отчего необходимые для полного перебора затраты времени и памяти делают применение алгоритма на практике невозможным. Подобные задачи составляют подкласс комбинаторной оптимизации.

Построением методов более эффективных, чем полный перебор, и определением причин трудноразрешаемости некоторых задач занимается теория сложности алгоритмов. В этом направлении был получен ряд фундаментальных результатов, в частности теория Кука-Карпа об NP-полных задачах.

Одним из подходов к решению задач комбинаторной оптимизации является так называемый «геометрический подход». В его основе лежит представление множества вариантов задачи X в виде множества точек эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и допущении, что функция цели линейна (как правило, это выполнено). Таким образом, задачу комбинаторной оптимизации можно представить как оптимизацию линейной функции на некотором множестве точек в n-мерном пространстве:

$$f(x) = (c, x) \to \max\backslash\min, \quad x \in X.$$

В такой форме задача комбинаторной оптимизации напоминает постановку классической задачи линейного программирования. Идея задействовать алгоритмы линейного программирования для решения сложных оптимизационных задач появилась еще на заре развития данной теории, заложенной в 1939 году Л. Канторовичем[1]. Так, Дж. Данциг, Р. Фалкерсон и С. Джонсон опубликовали в 1954 году свою знаменитую работу [2] по альтернативному подходу к решению задачи коммивояжера, используя новую геометрическую конструкцию: многогранник задачи коммивояжера. Семью годами ранее Данциг разработал симплекс-метод [3], который быстро стал основным аппаратом решения задач линейного программирования. На волне воодушевления от бесконечных приложений симплекс-метода, Данциг, Фалкерсон и Джонсон преобразовали задачу коммивояжера к задаче целочисленного линейного программирования и, применив симплекс-метод, решили ее для 49 столиц штатов США, что на тот момент было по-настоящему феноменальным результатом.

Следует отметить, что в строгом смысле симплекс-метод не является эффективным алгоритмом. Действительно, в 1972 году В. Кли и Д. Минти показали, что на незначительно скошенном единичном кубе (куб Кли-Минти) симплекс-метод работает по наихудшему сценарию и требует экспоненциального числа шагов[4]. Тем не менее, уже в 1978 году Л. Хачиян модифицировал метод эллипсоидов Шора для решения задачи линейного программирования, доказав, что время вычисления будет гарантированно меньше полиномиальной функции от размерности задачи и количества входных данных [5]. В дальнейшем были описаны и более эффективные алгоритмы решения задачи, в частности, алгоритм внутренней точки Кармаркара, однако, фундаментальность результата Хачияна заключалась в доказательстве принципиальной полиномиальной разрешимости задачи линейного программирования.

Работы Хачияна и Кармаркара устранили первое препятствие на пути геометрического подхода к решению задач комбинаторной оптимизации. Теперь переход к задаче линейного программирования фактически предлагал эффективный алгоритм решения большинства известных комбинаторных задач.

Тонкость, однако, заключается в том, что по теореме Вейля-Минковского произвольный выпуклый многогранник можно определить двумя эквивалентными способами: как выпуклую оболочку его вершин (внутреннее описание) или как систему неравенств, описывающую пересечение некоторых

---

[1] Канторович, Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – ЛГУ. 1939. – 56с.

[2] Dantzig, G.B., Fulkerson, R., Johnson, S.M. Solution of a large-scale traveling salesman problem // Operations Research. Vol. 2. – 1954. – pp. 393-410

[3] Dantzig, G.B. Programming in a linear structure // Econometrica. Vol. 17. – 1949. – pp. 73-74.

[4] Klee, V., Minty, G.J. How good is the simplex algorithm? // Inequalities. Vol. 3. – Academic Press Inc. 1972. – pp. 159-175.

[5] Хачиян, Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // ЖВМ и МФ. Т. 20, №1. – 1980. – С. 51-69.

полупространств, задающих фасеты многогранника (внешнее описание). Задачи комбинаторной оптимизации сводятся к внутренней форме, а все эффективные алгоритмы описаны для внешней, между тем переход от вершин к фасетам является абсолютно нетривиальной задачей. Во-первых, она решена только для некоторых сравнительно «просто устроенных» классов комбинаторных многогранников, в то время как для большинства многогранников полного описания до сих пор не было построено. Во-вторых, зачастую многогранники задач имеют столь сложную структуру, что трудно даже принципиально говорить о возможном описании их фасет. Так, например, Л. Биллера и А. Сарангараджан доказали, что каждый 0/1 многогранник является гранью многогранника задачи коммивояжера[6]. В-третьих, даже если для некоторого многогранника комбинаторно-оптимизационной задачи построено полное внешнее описание, вероятнее всего оно содержит экспоненциально большое число неравенств и эффективность алгоритмов линейного программирования будет потеряна уже на входных данных.

Кроме непосредственного применения алгоритмов линейного программирования для решения задач комбинаторной оптимизации, геометрический подход предлагает новые конструкции для изучения, а именно: многогранники задач. Объектом исследования является не только полное описание граней многогранников, что необходимо для перехода от вершин к фасетам, но и изучение различных комбинаторных характеристик граничных комплексов многогранников задач и использование этих характеристик, например, для оценки сложности соответствующих задач.

Одним из наиболее ярких примеров характеристик такого рода служит плотность графа многогранника задачи. Напомним, что плотность графа или кликовое число графа равно наибольшему количеству попарно смежных вершин или числу вершин в наибольшей клике. В работах В.А. Бондаренко[7] установлено, что плотность графа многогранника служит нижней границей временной трудоемкости задачи в широком классе алгоритмов прямого типа, основанных на линейных сравнениях. К таким алгоритмам в частности относятся алгоритмы сортировки, «жадный» алгоритм, метод ветвей и границ, метод динамического программирования, венгерский алгоритм и другие широко известные комбинаторные методы.

В основе идеи лежит разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на конусы

[6] Billera, L.J., Sarangarajan, A. All 0-1 polytopes are traveling salesman polytopes. // Combinatorica. Vol. 16. – Springer Berlin. 1996. – pp. 175-188.

[7] Бондаренко, В.А. Многогранники с высокой плотностью графа и полиномиальная разрешимость задач комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. №4. – 1993. – С. 21-26.
Бондаренко, В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. – Ярославль: ЯрГУ, 1995. – 126с.

$$\bigcup_{x \in X} K(x) = \mathbb{R}^n.$$

Каждому элементу x множества X (каждому варианту в задаче оптимизации) ставится в соответствие свой конус

$$K(x) = \{\omega: (\omega, x) \geq (\omega, y), \forall y \in X\},$$

образованный всеми целевыми векторами ω для которых функция $f(t) = (\omega, t)$ на множестве X достигает максимума (или минимума, если в определении множества поменять знак неравенства) в точности на элементе x.

В 1956 году в своей знаменитой работе[8] Д. Гейл переоткрыл циклические многогранники, описанные за 50 лет до него К. Каратеодори[9]. Уже в $\mathbb{R}^4$ циклические многогранники могут иметь как угодно много вершин, причем все они будут смежны. Конусное разбиение, построенное по такому многограннику, обладает тем свойством, что любые два конуса граничат друг с другом по $(n-1)$-мерной грани. Алгоритм прямого типа, основанный на линейных сравнениях, отбрасывает часть конусов, деля пространства на два полупространства гиперплоскостью. В результате, для данного разбиения на каждом шаге может быть исключен только один конус, и полного перебора избежать принципиально невозможно.

Таким образом, плотность графа многогранника задачи в некотором роде отвечает на вопрос: «насколько сложна данная задача?». Действительно, для целого ряда известных труднорешаемых задач получена экспоненциальная нижняя оценка плотности графа многогранника, в то время как для полиномиально разрешимых задач установлены, соответственно, полиномиальные (а в некоторых случаях и линейные) верхние и нижние оценки плотности[10].

Из всего вышесказанного следует, что большой интерес для изучения представляют многогранники с высокой плотностью графа, но простым полиномиальным внешним описанием. С одной стороны высокая плотность графа предполагает, что ассоциированные с многогранником задачи будут труднорешаемыми. С другой стороны, достаточно простая система линейных неравенств, определяющих фасеты многогранника, позволила бы без каких-либо проблем задействовать известные полиномиальные алгоритмы линейного программирования. Примером подобных многогранников могут являться так

[8] Gale, D. Neighboring vertices on a convex polyhedron // Linear Inequalities and Related Systems. – Annals of Mathematics Studies. No. 38. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956. – pp. 255–263.
[9] Caratheodory, C. Ueber den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen // Mathematische Annalen. Vol. 64. – 1907. – pp. 95-115.
[10] Бондаренко, В.А., Максименко, А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. – М.: ЛКИ, 2008. – 184с.

называемые релаксационные многогранники задач, которые возникают, если в ограничениях комбинаторных задач целочисленным (дискретным) переменным разрешить принимать непрерывные значения. В частности к ним относятся рассмотренные в диссертации различные релаксации многогранника известной NP-полной задачи о максимальном разрезе графа, а также связанные с ними релаксации задачи 3-выполнимость булевых формул (3-SAT).

Цель работы

Целью работы является исследование и анализ свойств граничных комплексов различных релаксационных многогранников задачи о максимальном разрезе графа и задачи 3-SAT. В частности, рассмотрены вопросы описания и анализа свойств фасет многогранников, множеств целых и нецелочисленных вершин, а также построения эффективных алгоритмов решения частных случаев оптимизационных задач на изучаемых многогранниках.

Методы исследования

При решении поставленных задач использовались методы теории графов, линейного программирования, теории сложности алгоритмов, комбинаторного анализа, выпуклого анализа, в частности теории выпуклых многогранников, линейной алгебры.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказан субэкспоненциальный рост миноров матрицы, определяющей корневой полуметрический многогранник, с увеличением размерности пространства.
2. Установлено, что множество значений координат нецелочисленных вершин релаксационного многогранника задачи 3-SAT неограниченно: знаменатели координат растут сверхполиномиально с увеличением размерности пространства.
3. Построено необходимое условие нецелочисленности вершин релаксационного многогранника задачи 3-SAT, позволяющее эффективно описывать вершины.
4. Получены линейные ограничения на целевые функции, при которых задачи целочисленного программирования и распознавания целочисленности полиномиально разрешимы.

5. Построены последовательности вложенных релаксаций $M_{n,k}$ и $P_{m,n}^{s,t}$ многогранников задач о разрезе и 3-SAT. Обнаружены общие нецелочисленные вершины у различных релаксаций.
6. Установлена связь между классом гиперграфов особого рода и точками многогранника $M_{n,3}$, в разложении которых в выпуклые комбинации вершин нет целых. Построены точки многогранников $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$, в любом разложении которых в выпуклые комбинации вершин многогранника $M_{n,3}$ нет целых.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены для развития идей геометрического подхода к решению и анализу задач комбинаторной оптимизации, а также построению новых эффективных алгоритмов.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

1. Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск. 2007 и 2008 гг.)
2. V Всероссийская научная конференция «Математическое моделирования и краевые задачи» ММ-2008. Самара. СамГТУ. 2008 г.
3. Научная конференция студентов и аспирантов факультета ИВТ. ЯрГУ 2008 г.
4. IV Международная научно-практическая конференция «Образование и наука в 21 веке». София. 2008 г.
5. Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженский филиал КемГУ 2008 и 2010 гг.)
6. Конференция «Математика. Информационные технологии. Образование. – МИТО-2008». ОГУ, Оренбург 2008 г.
7. Шестьдесят вторая региональная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием «Молодежь. Наука. Инновации - 2009». Ярославль, ЯГТУ 2009г.
8. Общероссийская электронная научная конференция «Актуальные вопросы современной науки и образования» (Красноярск 2009 и 2010 гг.)

9. XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики». Нижний Новгород, 2011 г.

Публикации

По результатам исследования опубликовано 19 работ, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы. Полный объем диссертации – 138 страниц, список литературы содержит 69 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается характеристика задач дискретной оптимизации, среди которых особо выделяется подкласс задач комбинаторной оптимизации. На примере задачи коммивояжера обуславливается невозможность применения наиболее простого алгоритма полного перебора. Кратко излагаются основные положения теории сложности вычислений. Приводится исторический обзор развития «геометрического подхода» к решению задач комбинаторной оптимизации. На основании полученных ранее результатов обосновывается интерес к изучению свойств релаксационных многогранников задач с высокой плотностью графа, но простым внешним описанием. Проводится обзор литературы и кратко излагается содержание работы.

Первая глава посвящена обзору свойств «корневого полуметрического» многогранника $M_n \in \mathbb{R}^{4n^2}$, внешние ограничения которого имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \tag{2}$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i},\ t_{i,j} = t_{j,i},\ y_{i,j} = z_{j,i}, \tag{4}$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \tag{5}$$

$$x_{i,j} \geq 0,\ y_{i,j} \geq 0,\ z_{i,j} \geq 0,\ t_{i,j} \geq 0, \tag{6}$$

где i, j, k, l независимо пробегают значения $1, \dots, n$.

Рассматривается одна из основных NP-полных задач, а именно: задача о максимальном разрезе графа и строится многогранник задачи, известный как разрезной многогранник. Доказывается, что задача о максимальном разрезе сводится к задаче целочисленного программирования на корневом полуметрическом многограннике и, таким образом, M_n также является релаксационным многогранником задачи о разрезе, как впрочем, и ряда других.

На основании сверхэкспоненциальной оценки числа фасет разрезного многогранника обосновывается интерес к изучению его релаксаций.

Приводится обзор известных свойств корневого полуметрического многогранника, важных в рамках данного исследования.

1. Число фасет и задающих их линейных ограничений полиномиально по размерности пространства.
2. Число вершин многогранника M_n , в том числе целочисленных, экспоненциально.
3. Все целочисленные вершины многогранника являются попарно смежными, и соответственно плотность графа также экспоненциальна по n (субэкспоненциальна по размерности пространства).
4. Все вершины многогранника являются полуцелыми, их координаты принадлежат множеству $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Целые и нецелочисленные вершины полностью описаны.

Рассматривается решение двух оптимизационных задач на корневом полуметрическом многограннике: задачи целочисленного программирования (оптимизации линейной функции на множестве целых вершин) и задачи следующего вида: для заданной линейной целевой функции f требуется выяснить, достигается ли $\max\{f(u)\colon\ u \in M\}$ в целой вершине многогранника M (задача распознавания целочисленности).

В монографии В.Н. Шевченко[11] высказывается следующая гипотеза о связи значения функции

$$\Delta(A) = \max_{B \subseteq A} |B|,$$

где B – произвольная квадратная подматрица матрицы A, с решением задачи целочисленного программирования на системе неравенств $Ax \leq b$.

Гипотеза 1.5.2. *Если для целочисленной матрицы A известно, что* $\Delta(A)$ *не превосходит фиксированного натурального числа* d*, то задача целочисленного программирования на* $Ax \leq \mathrm{b}$ *полиномиально разрешима.*

При $d = 1$ Гипотеза 1.5.2 превращается в широко известное утверждение о задаче целочисленного программирования на вполне унимодулярных матрицах.

В пятом разделе первой главы исследуется функция Δ_n – максимум абсолютных величин миноров матрицы линейных ограничений, определяющих многогранник M_n. Учитывая ограниченность знаменателей координат вершин корневого полуметрического многогранника можно предположить, что $\Delta_\mathrm{n} \leq 2$, однако, это не так. Устанавливается, что имеет место

[11] Шевченко, В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. – М.: Физматлит, 1995. – 192с.

Теорема 1.5.3. *Для корневых полуметрических многогранников M_n значение максимума миноров матрицы линейных ограничений растет экспоненциально по n (субэкспоненциально по размерности пространства):*

$$\Delta_{\mathrm{n}} \geq 2^{[\frac{n}{3}]}.$$

Результат является косвенным подтверждением Гипотезы 1.5.2, а именно: Δ_{n} не ограничена и задача целочисленного программирования на многограннике NP-полна.

Объектом исследования во **второй главе** является многогранник $P_{m,n} \subseteq \mathbb{R}^{6mn}$. Описывающие его внешние ограничения имеют вид:

$$\sum_{k,l} x_{i,j}^{k,l} = 1, \tag{7}$$

$$x_{i,j}^{1,1} + x_{i,j}^{2,1} + x_{i,j}^{3,1} = x_{i,t}^{1,1} + x_{i,t}^{2,1} + x_{i,t}^{3,1}, \tag{8}$$

$$x_{i,j}^{k,1} + x_{i,j}^{k,2} = x_{s,j}^{k,1} + x_{s,j}^{k,2}, \tag{9}$$

$$x_{i,j}^{k,l} \geq 0, \tag{10}$$

где $k \in \{1,2,3\}$, $l \in \{1,2\}$, $i, s \in \{1,2,\dots,m\}$, $j, t \in \{1,2,\dots,n\}$.

Нетрудно заметить, что корневой полуметрический многогранник M_n изоморфен грани многогранника $P_{m,n}$. В частности его можно получить проведением $2mn$ гиперплоскостей вида $x_{i,j}^{3,l} = 0$, где $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq 2$.

Таким образом, многогранник $P_{m,n}$ также является релаксацией разрезного многогранника. Кроме того, в первом разделе приведено сведение другой известной NP-полной задачи: 3-выполнимость (3-SAT) к задачам целочисленного программирования и распознавания целочисленности на $P_{m,n}$. Соответственно, многогранник $P_{m,n}$ называется релаксационным многогранником задачи 3-SAT.

Основной целью исследования во второй главе является сравнительный анализ свойств релаксационного многогранника задачи 3-SAT и корневого полуметрического многогранника. Во втором разделе приведены основные известные свойства граничного комплекса многогранника $P_{m,n}$.

1. Число фасет и задающих их линейных ограничений полиномиально по размерности пространства.
2. Число вершин многогранника $P_{m,n}$, в том числе целочисленных, экспоненциально.
3. Не все целочисленные вершины многогранника являются попарно смежными, однако многогранник $P_{m,n}$ сохраняет экспоненциальную плотность графа, которая превосходит $\min\{2^m, 3^n\}$.

Третий раздел посвящен изучению множества нецелочисленных вершин релаксационного многогранника задачи 3-SAT. В отличие от корневого полуметрического многогранника, все вершины которого полностью описаны, и координаты которых принимают свои значения только из множества $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$, ситуация с многогранником $P_{m,n}$ оказывается принципиально более сложной. Множество значений координат вершин не только не ограничено, но и растет сверхполиномиально с увеличением размерности многогранника. Следствием является принципиальная сложность построения полного описания всех нецелых вершин $P_{m,n}$. В диссертации приведено частичное описание этого множества в виде необходимого условия для нецелочисленных вершин многогранника.

Основные результаты раздела сформулированы в виде двух теорем.

Теорема 2.3.1. *Выполняется неравенство:*

$$\delta(m,n) \geq 2^{\left\lfloor\frac{\min\{m,n\}}{2}\right\rfloor},$$

где $\delta(m,n)$ равно максимальному значению знаменателей координат вершин многогранника $P_{m,n}$.

Теорема 2.3.2. *Если точка является нецелочисленной вершиной $P_{m,n}$*, то найдутся такие i,j,k,q,r *для которых:*

$$j \in \mathbb{N}_n, i,k \in \mathbb{N}_m, (i \neq k),$$
$$q,r \in \{1,2,3\}\ (q \neq r):$$
$$x_{i,j}^{q,1} > 0, x_{i,j}^{r,2} > 0, x_{i,j}^{q,2} + x_{i,j}^{r,1} = 0, x_{k,j}^{q,1} + x_{k,j}^{r,2} = 0,$$
$$x_{i,j}^{6-q-r,1} \cdot x_{i,j}^{6-q-r,2} = 0, x_{k,j}^{6-q-r,1} \cdot x_{k,j}^{6-q-r,2} = 0.$$

Четвертый и пятый разделы посвящены эффективному решению оптимизационных задач на релаксационном многограннике задачи 3-SAT.

Задача целочисленного программирования на $P_{m,n}$ является NP-трудной, так как к ней сводится NP-полная задача 3-SAT (следует отметить, что прямым следствием Теоремы 2.3.1 является тот факт, что величина $\Delta(P_{m,n})$ – максимум миноров матрицы линейных неравенств, определяющих многогранник, не ограничена сверху). Соответственно интерес представляют возможные дополнительные условия на целевые функции для эффективного решения задачи целочисленного программирования на многограннике.

Теорема 2.4.2. *1. Если вектор $c \in \mathbb{R}^{6mn}$ имеет вид:*

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \exists \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \{-1,1\}, \forall i \in \mathbb{N}_m:$$
$$\alpha_j\left(c_{i,j}^{1,1} + c_{i,j}^{2,2}\right) \geq \alpha_j\left(c_{i,j}^{1,2} + c_{i,j}^{2,1}\right),$$
$$\beta_j\left(c_{i,j}^{1,1} + c_{i,j}^{3,2}\right) \geq \beta_j\left(c_{i,j}^{1,2} + c_{i,j}^{3,1}\right),$$

$$\gamma_j\left(c_{i,j}^{2,1}+c_{i,j}^{3,2}\right) \geq \gamma_j\left(c_{i,j}^{2,2}+c_{i,j}^{3,1}\right),$$

то на многограннике $P_{m,n}$ линейная целевая функция $f=(c,x)$ достигает максимума в целой вершине.

2. Если в ограничениях на вектор c все неравенства заменить на строгие, то среди вершин, на которых целевая функция $f=(c,x)$ принимает максимальное значение, не будет ни одной нецелочисленной.

Известно, что для релаксационного многогранника задачи 3-SAT задача распознавания целочисленности является NP-полной. В то же время для корневого полуметрического многогранника, изоморфного грани $P_{m,n}$, установлена полиномиальная разрешимость задачи.

Очевидно, что для целевых функций, удовлетворяющих Теореме 2.4.2 задача распознавания целочисленности вырождена. Однако Теорема 2.4.2 обладает одним существенным недостатком, а именно: ограничения накладываются на все переменные целевой функции. Учитывая специфику задачи можно сформулировать более гибкие ограничения для эффективного решения задачи распознавания целочисленности.

Введем вектор $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{6mn}$:

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \exists a,b \in \{1,2,3\}\ (a \neq b), \forall i \in \mathbb{N}_m:$$
$$c_{i,j}^{a,1}+c_{i,j}^{b,2}=c_{i,j}^{a,2}+c_{i,j}^{b,1}.$$

Соответствующую ему целевую функцию обозначим $\tilde{f}(x)=(\tilde{c},x)$.

Теорема 2.5.1. *Для класса многогранников $P_{m,n}$ и целевой функции $\tilde{f}(x)$ задача распознавания целочисленности является полиномиально разрешимой.*

В **третьей главе** проводится исследование релаксаций более высоких уровней для многогранников задач о разрезе и 3-SAT.

Многогранники M_n и $P_{m,n}$ являются релаксационными многогранниками задач о максимальном разрезе и 3-SAT соответственно. Выпуклые оболочки множеств их целых вершин M_n^Z и $P_{m,n}^Z$ изоморфны многогранникам этих задач и описываются, по-видимому, сверхэкспоненциальным числом ограничений, которые до сих пор не были найдены в общем случае. Однако если разбить дополнительные ограничения на классы, то можно построить промежуточные релаксации X и Y , такие что $P_{m,n}^Z \subseteq X \subseteq P_{m,n}$ и $M_n^Z \subseteq Y \subseteq M_n$, которые представляют значительный интерес для изучения.

Первый раздел третьей главы посвящен построению релаксаций более высоких уровней для многогранника задачи 3-SAT, а также описанию и анализу свойств первой отличной от $P_{m,n}$ релаксации. Рассмотрен вопрос о наличии общих нецелочисленных вершин у различных релаксаций.

Для многогранника $P_{m,n}$ определим, релаксации более высоких уровней. Выберем натуральные s и t ($s < m$, $t < n$) и рассмотрим систему неравенств Q, задающую многогранник $P_{s,t}^{Z}$; обозначим через Θ число этих неравенств. Далее для каждого $s-$элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_s\}$ множества $\mathbb{N}_m$ и каждого $t-$ элементного подмножества $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_t\}$ множества $\mathbb{N}_n$ рассмотрим систему $Q_{\nu,\omega}$, получающуюся из системы неравенств Q заменой переменных $x_{i,j}^{k,l}$ на $x_{\nu_i,\omega_j}^{k,l}$ соответственно. Дополним систему (7)-(10) совокупностью всех $\Theta \cdot C_m^s \cdot C_n^t$ указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим как $P_{m,n}^{s,t} \subseteq P_{m,n}$.

Многогранники $P_{1,1}$, $P_{1,t}$ и $P_{s,1}$ ($\forall s \in \mathbb{N}_m$ и $\forall t \in \mathbb{N}_n$) не имеют нецелочисленных вершин и совпадают с $P_{1,1}^{Z}$, $P_{1,t}^{Z}$ и $P_{s,1}^{Z}$ соответственно, а, значит, и релаксации $P_{m,n}^{1,1}$, $P_{m,n}^{1,t}$ и $P_{m,n}^{s,1}$ совпадают с самим многогранником $P_{m,n}$. Таким образом $P_{m,n}^{2,2}$ – это первая отличная от $P_{m,n}$ релаксация.

Теорема 3.1.1. *Многогранник $P_{m,n}^{2,2}$ задается системой (7)-(10) и дополнительными ограничениями вида:*

$$\forall i,j,k,l\colon\ 1 \le i,k \le m, 1 \le j,l \le n,$$
$$\forall a \in \{1,2\}, \forall b,c,d,e \in \{1,2,3\}\ (b \ne c, d \ne e),$$
$$x_{i,j}^{b,a} + x_{i,j}^{c,a} + x_{i,j}^{g,f} + x_{i,l}^{d,f} + x_{i,l}^{e,f} + x_{i,l}^{h,a} +$$
$$x_{k,j}^{b,a} + x_{k,j}^{c,a} + x_{k,j}^{g,f} + x_{k,l}^{d,a} + x_{k,l}^{e,a} + x_{k,l}^{h,f} \le 3,$$

где $f = 3 - a$, $g = 6 - b - c$, $g = 6 - d - e$.

В общем случае, многогранники $P_{m,n}^{s,t}$ представляют собой набор вложенных друг в друга релаксаций многогранника задачи 3-SAT:

$$\text{3-SAT}(m,n) \sim P_{m,n}^{Z} = P_{m,n}^{m,n} \subseteq P_{m,n}^{s,t} \subseteq P_{m,n}^{2,2} \subseteq P_{m,n}^{2,1} = P_{m,n}^{1,2} = P_{m,n}^{1,1} = P_{m,n}.$$

Если дополнительно принять $s = t$, то можно получить строгую последовательность вложений для релаксаций многогранника задачи 3-SAT.

Теорема 3.1.2. *Для любых $s \in \mathbb{N}_m$ и $t \in \mathbb{N}_n$ множества целых вершин многогранников $P_{m,n}^{s,t}$ и $P_{m,n}$ равны между собой.*

Следствие из Теоремы 3.1.2. *Для любых $s,u \in \mathbb{N}_m$ и $t,v \in \mathbb{N}_n$ множества целых вершин многогранников $P_{m,n}^{s,t}$ и $P_{m,n}^{u,v}$ совпадают.*

Ситуация с нецелыми вершинами релаксаций многогранника задачи 3-SAT значительно сложнее. Даже наиболее простой случай с вершинами $P_{m,n}^{2,2}$ остается не проясненным. Только для небольших значений m и n была установлена

Теорема 3.1.6. *При m и $n \le 4$ многогранники $P_{m,n}^{2,2}$ и $P_{m,n}$ не имеют общих нецелочисленных вершин.*

Вопрос с общими нецелыми вершинами $P_{m,n}$ и $P_{m,n}^{2,2}$ большей размерности остается открытым.

Относительно общих вершин промежуточных релаксаций $P_{m,n}^{s,t}$ все еще более запутано. Так в диссертации приведены точки из пространства $\mathbb{R}^{54}$, являющиеся общими нецелыми вершинами для многогранников $P_{3,3}^{2,2}$, $P_{3,3}^{2,3}$ и $P_{3,3}^{3,2}$.

Однако если зафиксировать $n = 2$ ситуация оказывается иной

Теорема 3.1.7. *Многогранники $P_{m,2}^{2,2}$ и $P_{m,2}^{3,2}$ не имеют общих нецелых вершин, по меньшей мере, для всех $m \leq 5$.*

Опираясь на это и Теорему 3.1.6 можно предположить, что многогранники $P_{m,2}^{s,2}$ и $P_{m,2}^{s+1,2}$ не имеют совместных нецелочисленных вершин, однако это не так, и в диссертации приведены общие нецелые вершины для многогранников $P_{5,2}^{3,2}$ и $P_{5,2}^{4,2}$.

Таким образом, несмотря на то, что нецелые вершины релаксаций $P_{m,n}^{s,t}$ были рассмотрены достаточно фрагментарно, принципиальная сложность их свойств хорошо видна из приведенных в разделе фактов и предполагает дальнейшее изучение.

Во втором разделе третьей главы проводится построение последовательности релаксаций более высоких уровней $M_{n,k}$ для разрезного многогранника, аналогично рассмотренной для многогранника задачи 3-SAT:

$$CUT(n) \sim M_n^Z = M_{n,n} \subseteq M_{n,n-1} \subseteq \cdots \subseteq M_{n,k} \subseteq \cdots \subseteq M_{n,3} \subseteq M_{n,2} = M_{n,1} = M_n.$$

Приведены полные описания первых нескольких релаксаций.

Многогранники M_1 и M_2 не имеет нецелочисленных вершин и совпадают с M_1^Z и M_2^Z соответственно, а, значит, и релаксации $M_{n,1}$ и $M_{n,2}$ будут совпадать с самим многогранником M_n. Таким образом $M_{n,3}$ – это первая отличная от M_n релаксация.

Известно, что многогранник $M_{n,3}$ определяется системой (1)-(6) и дополнительными ограничениями вида:

$$x_{i,j} + t_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leq 2,$$
$$x_{i,j} + t_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leq 2,$$
$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leq 2,$$
$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leq 2,$$

для каждой тройки i, j, k, где $1 \leq i < j < k \leq n$.

Введя новые обозначения для координат:

$$x_{i,j} = x_{i,j}^{1,1}, \qquad y_{i,j} = x_{i,j}^{1,2}, \qquad z_{i,j} = x_{i,j}^{2,1}, \qquad t_{i,j} = x_{i,j}^{2,2}$$

можно получить альтернативное описание многогранника $M_{n,3}$.

Теорема 3.2.1. *Многогранник $M_{n,3}$ определяется системой (1)-(6) и дополнительными ограничениями вида:*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} \leq 1, \tag{11}$$

для каждой тройки индексов i, j, k, где $1 \leq i < j < k \leq n$, и всех векторов $a \in [1,2]^n$.

Следует отметить, что многогранник $M_{n,3}$ в некотором роде подобен корневому полуметрическому многограннику. Рассмотрим многогранник $M_n^* \in \mathbb{R}^{4n^2+4C_n^3}$, определяемый системой (1)-(6) и дополнительными ограничениями

$$\forall i, j, k, p, q, r \ (1 \leq i \leq p < j \leq q < k \leq r \leq n):$$
$$y_{i,j} + z_{i,k} + y_{j,k} + x_{i,j,k} = 1,$$
$$x_{i,j} + y_{i,k} + t_{j,k} + y_{i,j,k} = 1,$$
$$z_{i,j} + t_{i,k} + x_{j,k} + z_{i,j,k} = 1,$$
$$t_{i,j} + x_{i,k} + z_{j,k} + t_{i,j,k} = 1,$$
$$x_{i,j,k} + y_{i,j,k} + z_{i,j,k} + t_{i,j,k} = 1,$$
$$x_{i,j,k} + y_{i,j,k} = x_{i,q,k} + y_{i,q,k},$$
$$x_{i,j,k} + z_{i,j,k} = x_{i,j,r} + z_{i,j,r},$$
$$x_{i,j,k} + t_{i,j,k} = x_{p,j,k} + t_{p,j,k}.$$

Теорема 3.2.2. *Многогранники M_n^* и $M_{n,3}$ равны.*

Далее в третьей главе рассматриваются последующие релаксации $M_{n,k}$ разрезного многогранника.

Теорема 3.2.3. *Многогранник $M_{n,4}$ определяется системой (1)-(6), (11) и дополнительными ограничениями вида:*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} -$$
$$-x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} \leq 1, \tag{12}$$

для каждой четверки индексов i, j, k, l, где $1 \leq i < j < k < l \leq n$, и всех векторов $a \in [1,2]^n$.

Теорема 3.2.4. *a) Многогранник $M_{n,k}$ задается системой (1)-(6) и дополнительными ограничениями, среди которых присутствуют ограничения вида:*

$$x_{\nu_1,\nu_1}^{a_{\nu_1},a_{\nu_1}} + x_{\nu_2,\nu_2}^{a_{\nu_2},a_{\nu_2}} + \cdots + x_{\nu_p,\nu_p}^{a_{\nu_p},a_{\nu_p}} - x_{\nu_1,\nu_2}^{a_{\nu_2},a_{\nu_1}} - x_{\nu_1,\nu_3}^{a_{\nu_3},a_{\nu_1}} - \cdots - x_{\nu_{p-1},\nu_p}^{a_{p-1},a_{\nu_p}} \leq 1,$$

для каждого p-элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ множества $\mathbb{N}_n$, для любого натурального p: $(3 \leq p \leq k)$, и всех векторов $a \in [1,2]^n$.

b) Точка с координатами:

$$x_{i,i}^{3-a_i,3-a_i} = \frac{k-1}{k}, \qquad x_{i,j}^{a_j,a_i} = 0,$$

$$x_{i,i}^{3-a_i,3-a_i} = \frac{k-1}{k}, \qquad x_{i,j}^{a_j,a_i} = 0,$$

для всех i,j *, где* $1 \le i < j \le n$ *, и для всех векторов* $a \in [1,2]^n$ *является вершиной многогранника* $M_{n,k}$.

Теорема 3.2.4 полностью описывает многогранники $M_{n,3}$ и $M_{n,4}$, но не произвольный $M_{n,k}$, так уже релаксация $M_{n,5}$ содержит дополнительные линейные ограничения, не подпадающие под условия теоремы.

Теорема 3.2.9. *Многогранник* $M_{n,5}$ *задается системой (1)-(6), (11), (12) и дополнительными ограничениями вида:*

$$\forall i,j,k,l,p\colon 1 \le i < j < k < l < p \le n, \forall a,b \in [1,2]^n\colon$$

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} + x_{p,p}^{a_p,a_p} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{i,p}^{a_p,a_i} -$$

$$-x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{j,p}^{a_p,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} - x_{k,p}^{a_p,a_k} - x_{l,p}^{a_p,a_l} \le 1,$$

$$2\left(x_{i,i}^{b_i,b_i} + x_{j,j}^{b_j,b_j} + x_{k,k}^{b_k,b_k} + x_{l,l}^{b_l,b_l} + x_{p,p}^{b_p,b_p}\right) - x_{i,j}^{b_j,b_i} - x_{i,k}^{b_k,b_i} - x_{i,l}^{b_l,b_i} -$$

$$-x_{i,p}^{b_p,b_i} - x_{j,k}^{b_k,b_j} - x_{j,l}^{b_l,b_j} - x_{j,p}^{b_p,b_j} - x_{k,l}^{b_l,b_k} - x_{k,p}^{b_p,b_k} - x_{l,p}^{b_p,b_l} \le 3,$$

$$\forall i,j,k,l\colon 1 \le i < j < k < l \le n, \forall p \in N_n \backslash \{i,j,k,l\}, c \in [1,2]^n\colon$$

$$3 \cdot x_{p,p}^{1-c_p,1-c_p} + 2\left(x_{p,i}^{c_i,c_p} + x_{p,j}^{c_j,c_p} + x_{p,k}^{c_k,c_p} + x_{p,l}^{c_l,c_p}\right) -$$

$$-x_{i,j}^{c_j,c_i} - x_{i,k}^{c_k,c_i} - x_{i,l}^{c_l,c_i} - x_{j,k}^{c_k,c_j} - x_{j,l}^{c_l,c_j} - x_{k,l}^{c_l,c_k} \le 3.$$

Относительно общих нецелочисленных вершин у различных релаксаций $M_{n,k}$ разрезного многогранника ситуация не менее сложная, чем для релаксаций многогранника задачи 3-SAT. Известно, что

Утверждение 3.2.10. *Многогранник* $M_{n,3}$ *и корневой полуметрический многогранник* M_n *не имеют общих нецелочисленных вершин.*

Однако, уже для нецелочисленных вершин $M_{n,3}$ и $M_{n,4}$ вопрос остается открытым, несмотря на описание всех фасет $M_{n,4}$ (Теорема 3.2.3). Полным перебором вершин установлена

Теорема 3.2.11. *Многогранник* $M_{n,3}$ *и* $M_{n,4}$ *не имеют общих нецелочисленных вершин, по меньшей мере, для всех* $n \le 6$.

Для корневого полуметрического многогранника известно, что задача распознавания целочисленности на нем полиномиально разрешима, что принципиально отличает его от других многогранников, в том числе подробно рассмотренного во второй главе релаксационного многогранника задачи 3-SAT, для которого задача распознавания целочисленности NP-полна. В основе этого результата лежит следующее свойство первой отличной от M_n релаксации разрезного многогранника[12]:

Утверждение 4.1. *Каждая точка многогранника $M_{n,3}$ является выпуклой комбинацией вершин многогранника M_n, среди которых есть хотя бы одна целая.*

В **четвертой главе** исследуется вопрос о сохранении этого свойства относительно разложения точек в выпуклую комбинацию вершин следующей релаксации: $M_{n,3}$. Устанавливается, что для многогранников $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$ ситуация оказывается принципиально иной. Для решения поставленной задачи вводится новая конструкция гиперграфов специального вида.

Рассматривается множество 3-однородных смешанных гиперграфов вида $G = (V, E, A)$, где

- V – множество вершин, $V = \mathbb{N}_n$;
- E – множество неориентированных ребер, $E = \{(i, j, k)\} \subseteq \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$;
- A – множество ориентированных ребер, $A = \{((i, j), k)\} \subseteq \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$, где пара вершин (i, j) – начало ребра, вершина k – конец ребра.

Вводится операцию *инвертирования* i-той вершины гиперграфа $G = (V, E, A)$, которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i, j, k) \to ((j, k), i),$$
$$((j, k), i) \to (i, j, k),$$
$$((i, j), k) \to ((i, k), j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф $G' = Inv_i G = (V, E', A')$.

Аналогично определяется операция *инвертирования подмножества вершин* гиперграфа G, так, что $Inv_{i,j,k}(G) = Inv_i\left(Inv_j\left(Inv_k(G)\right)\right)$. Нетрудно убедиться, что операция инвертирования подмножества вершин не зависит от порядка инвертирования отдельных вершин и

$$Inv_i\left(Inv_j(G)\right) = Inv_j\left(Inv_i(G)\right).$$

Рассматривается класс G_I гиперграфов $G = (V, E, A)$, для которых множество неориентированных ребер E не пусто и остается непустым при всех возможных инверсиях. Класс G_I называется классом *неинвертируемых гиперграфов* рассматриваемого вида. Для G_I известно

[12] Бондаренко, В.А., Урываев, Б.В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика, – 2007, №6. – С. 18-23.

Теорема 4.1.1. *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» является NP-полной.*

К данной задаче сводится сужение задачи 3-SAT, а именно: *монотонная 3-выполнимость при различных литералах* (monotone not-all-equal 3-SAT). Кроме того, частный случай задачи распознавания принадлежности классу G_I для гиперграфов $G = (V, E, \emptyset)$ без ориентированных ребер эквивалентен известной *задаче о 2-раскрашиваемости 3-однородного гиперграфа*, которая также является NP-полной.

Следствием этого является тот факт, что класс неинвертируемых гиперграфов не пуст, так как любой 3-однородный не 2-раскрашиваемый гиперграф (как и его произвольная инверсия) принадлежит G_I, в частности этому условию удовлетворяют:

1) полный 3-однородный гиперграф на n вершинах, где $n \geq 5$;
2) плоскость Фано (7 вершин и 7 ребер);
3) аффинная плоскость 3-го порядка (9 вершин и 12 ребер) и многие другие.

В последующих разделах четвертой главы гиперграфы приведенного вида используются для описания свойств точек релаксаций разрезного многогранника $M_{n,k}$.

Каждой точке u многогранника $M_{n,3}$ сопоставляется 3-однородный смешанный гиперграф рассматриваемого вида, который называется гиперграфом точки $G(u)$, по следующим правилам:

1) $V = \mathbb{N}_n$;
2) $(i, j, k) \in E(u)$ тогда и только тогда, когда
$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2;$$
3) $\big((i, j), k\big) \in A(u)$ тогда и только тогда, когда
$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2.$$

Каждому из дополнительных ограничений (11) соответствует фасета многогранника $M_{n,3}$ и ребро гиперграфа $G(u)$. Геометрический смысл гиперграфа $G(u)$ заключается в том, что он показывает, каким из «новых» фасет $M_{n,3}$ принадлежит точка u.

Теорема 4.2.1. *Если для некоторой точки $u \in M_{n,3}$ ее гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, то в любом разложении u в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.*

Теорема 4.2.1 подсказывает направление для поиска точек релаксаций $M_{n,k}$ в любом разложении которых в выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины. Достаточно построить такие точки $M_{n,k}$, гиперграфы которых принадлежат классу неинвертируемых гиперграфов, который, как было показано выше, не пуст.

Теорема 4.3.1. *Для любого 3-однородного смешанного гиперграфа* G *рассматриваемого вида найдется такая точка* u *многогранника* $M_{n,4}$*, что* $G = G(u)$.

Теорема 4.3.2. *Для любых* $n \geq 5$ *найдутся точки многогранника* $M_{n,4}$*, гиперграфы которых неивертируемы и в любом разложении которых в выпуклую комбинацию вершин многогранника* $M_{n,3}$ *нет ни одной целой.*

Относительно следующей релаксации $M_{n,5}$ все не так просто. Многогранник описывается значительно более сложными ограничениями (Теорема 3.2.9) и далеко не каждому 3-однородному смешанному гиперграфу G можно сопоставить такую точку $u \in M_{n,5}$, что $G(u) = G$. В частности, имеет место

Теорема 4.3.3. *Не существует ни одной точки многогранника* $M_{n,5}$*, гиперграф которой содержит в качестве подграфа полный 3-однородный гиперграф на 5-ти вершинах или его произвольную инверсию.*

В то же время для многогранника $M_{n,5}$ имеет место

Теорема 4.3.4. *Для любого* $n \geq 195$ *существует точка* $u \in M_{n,5} \subseteq M_{n,4}$ *в любом разложении которой в виде выпуклой комбинации вершин* $M_{n,3}$ *нет ни одной целой вершины.*

Вопрос с наличием подобных точек у релаксаций $M_{n,6}$ и далее остается открытым. Предположительно имеет место

Гипотеза 4.3.5. *Для любого натурального* k *найдется такой номер* n*, что в многограннике* $M_{n,k}$ *существуют точки, в любом разложении которых в выпуклую комбинацию вершин* $M_{n,3}$ *нет целых.*

В четвертом разделе четвертой главы проводится анализ основного утверждения главы – Теоремы 4.2.1. Рассматривается следующий вопрос: является ли данная теорема также и необходимым условием для отсутствия целых вершин в любом разложении точки многогранника $M_{n,3}$ в выпуклую комбинацию вершин. Устанавливается, что это не так, в том числе и для точек $M_{n,4}$. Доказывается более общее утверждение, которое является как достаточным, так и необходимым условием.

Теорема 4.4.1. *В любом разложении точки* u *многогранника* $M_{n,3}$ *в виде выпуклой комбинации вершин* $M_{n,3}$ *нет ни одной целой вершины тогда и только тогда, когда точка* u *удовлетворяет следующим условиям*

$$\forall v = Inv_U(u)\ (U \subseteq \mathbb{N}_n), \exists i, j, k \in \mathbb{N}_n:$$
$$x_{i,j} = 0 \text{ или } y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2.$$

Теорема 4.4.2. *При любом $n \geq 33$ найдется точка многогранника $M_{n,4}$ в любом разложении которой в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины, но гиперграф которой не принадлежит классу неинвертируемых гиперграфов G_I.*

Публикации автора в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Николаев, А.В. О нецелочисленных вершинах релаксаций многогранника задачи 3-Выполнимость / А.В. Николаев // Моделирование и анализ информационных систем. – 2010. – Т. 17, № 2. – С. 99-111.
2. Николаев, А.В. Некоторые свойства релаксаций разрезного многогранника / В.А. Бондаренко, А.В. Николаев // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – Т.3 (Естественные науки), №2. – С. 23-29.
3. Николаев, А.В. Гиперграфы специального вида и анализ свойств релаксаций разрезного многогранника / А.В. Николаев // Моделирование и анализ информационных систем. – 2011. – Т. 18, № 3. – С. 82-100.

Другие публикации автора

4. Николаев, А.В. Некоторые свойства релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость / О.А. Дунаева, А.В. Николаев // Студенческие заметки по информатике и математике. Яросл. гос. университет. 2007. – С. 7-9.
5. Николаев, А.В. Свойства релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость / О.А. Дунаева, А.В. Николаев // VIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Программа и тезисы докладов. Новосибирск. 2007. – С. 19.
6. Николаев, А.В. Некоторые свойства релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость / О.А. Дунаева, А.В. Николаев // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. Самара. СамГТУ. 2008. – С. 37-43.
7. Николаев, А.В. Ограничения на целевые функции для эффективного решения задачи целочисленного программирования на многограннике, ассоциированном с задачей 3-выполнимость / А.В. Николаев // Студенческие заметки по информатике и математике. Материалы

научной конференции студентов и аспирантов факультета ИВТ. – Ярославль. ЯрГУ. 2008. – Вып. 2. – С. 85-87.

8. Николаев, А.В. Об эффективном решении задачи целочисленного программирования на многограннике, связанном с задачей 3-выполнимость / А.В. Николаев // Материалы IV международной научно-практической конференции, «Образование и наука в 21 веке». София. «Бял ГРАД-БГ» ООД. 2008. – С. 32-37.
9. Николаев, А.В. О двух многогранниках, связанных с задачей 3-выполнимость / А.В. Николаев // IX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Программа и тезисы докладов. Новосибирск. 2008. – С. 23-24.
10. Николаев, А.В. Необходимое условие для нецелочисленных вершин релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость / А.В. Николаев // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008). Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск. Изд-во Том. ун-та, 2008. – Ч. 2. – С. 163-166.
11. Николаев, А.В. О двух многогранниках, связанных с задачей 3-выполнимость / А.В. Николаев // Математика. Информационные технологии. Образование. Сборник научных трудов. – Оренбург: ОГУ, 2008. –С.91-95.
12. Николаев, А.В. О нецелочисленных вершинах релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость / А.В. Николаев // Современные проблемы математики и информатики. Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Яросл. гос. ун-т., Ярославль, 2008. Вып. 9. – С. 38-45.
13. Николаев, А.В. О релаксационном многограннике задачи 3-выполнимость / А.В. Николаев // Шестьдесят вторая региональная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием «Молодежь. Наука. Инновации - 2009». Тезисы докладов. Ярославль, ЯГТУ 2009. – С. 215-216.
14. Николаев, А.В. Об общих границах некоторых релаксаций корневого полуметрического многогранника / А.В. Николаев // Materialy V mezinarodni vedecko – prakticka conference «Vedecky prumysl evropskeho kontinentu - 2009». – Dil 14. Technicke vedy. Vystavba a architektura. Matematika. Moderni informacni technologie: Praha. Publishing House «Education and Science» s.r.o. – 2009. –S.49-52.

15. Николаев, А.В. О граничных комплексах некоторых релаксаций разрезного многогранника / А.В. Николаев // Заметки по информатике и математике. Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. Ярославль, ЯрГУ, 2009. Вып. 2. – С. 96-102.
16. Николаев, А.В. О некоторых релаксациях корневого полуметрического многогранника и их граничных комплексах / А.В. Николаев // Актуальные вопросы современной науки и образования: Материалы I Общероссийской электронной научной конференции (декабрь, 2009 г.) – Красноярск: Издательство ООО «Научно-инновационный центр», 2010. – С. 909-917.
17. Николаев, А.В. О некоторых релаксациях разрезного многогранника / А.В. Николаев // Актуальные вопросы современной науки и образования: Материалы Общероссийской электронной научной конференции (сентябрь, 2010 г.). Выпуск 2. – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2010. – С. 330-336.
18. Николаев, А.В. Релаксации разрезного многогранника и геометрический подход к задачам дискретной оптимизации / А.В. Николаев // Информационные технологии и математическое моделирование ИТММ-2010. Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск: Изд. Том. ун-та, 2010, Ч.2. – С. 167-172.
19. Николаев, А.В. О связи между классом гиперграфов специального вида и свойствами вершин релаксаций разрезного многогранника / В.А. Бондаренко, А.В. Николаев // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – С. 58-62.