На правах рукописи

Красильщиков Василий Вячеславович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК КВАЗИРЕШЕТОК

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и теории чисел Владимирского государственного гуманитарного университета.

Научный руководитель –	доктор физико-математических наук, профессор Владимир Георгиевич Журавлев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сергей Геннадьевич Танкеев
	кандидат физико-математических наук Николай Николаевич Мануйлов
Ведущая организация –	Санкт-Петербургское отделение математического института РАН им. В.А. Стеклова

Защита диссертации состоится 5 декабря 2008 г. в __ на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Автореферат разослан __ ноября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационого совета С.И. Яблокова

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В теории чисел вместе с изучением периодических структур (прогрессий, решеток, периодических разбиений) активно исследуются непериодические структуры, в частности, квазипериодические структуры. Интенсивно развивается новое направление в теориии чисел, имеющее многочисленные приложения – теория одномерных квазипериодических разбиений. Характерным примером таких разбиений являются бесконечные разбиения Фибоначчи, впервые введенные N. de Brujin[1] при рассмотрении задач теории квазикристаллов. Эти разбиения можно определить с помощью метода инфляции-дефляции, с помощью проектирования точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ на прямую $y = \tau^{-1}x$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение, с помощью рекуррентных соотношений, а также с помощью алгебраического метода[2]. Применение разбиений Фибоначчи к теории чисел берет свое начало в работе G. Rauzy[3].

Последовательности Штурма — классический объект теории чисел. Если нулю из этой последовательности поставить в соответствие полуинтервал большей длины, а единице — полуинтервал меньшей длины, то получим одномерные квазипериодические разбиения, обобщающие разбиения Фибоначчи[4]. Последовательности Штурма определяются с помощью кодировок иррационального поворота окружности. Поэтому изучение данных разбиений тесно связано как с кодировками иррациональных поворотов окружности, так и задачей распределения дробных долей.

Г. Вейль[5] доказал, что для иррационального α последовательность $\{n\alpha\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно распределена по модулю 1. В теории распределения дробных долей по модулю 1 многочисленные общие результаты были получены в монографии Н.М. Коробова[6], а также в работах Г.И. Архипова, А.А. Карацубы[7] и В.Н. Чубарикова[8] при помощи метода тригонометрических сумм. При этом рассматривались быстро растущие последовательности (степенные, экспонен-

[1] De Brujin N.G. Sequences of zeros and ones generated by special production rules // Kon.Nederl.Acad.Wetensch.Proc. — 1982. — Ser.A. — V. 84. — P. 38–52.

[2] Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — №3. — С. 18–46.

[3] Rauzy G. Echenges d'intervales et transformations induites // Acta Arithmetica. — 1978. — V. 34. — P. 315–328.

[4] Fogg N. Pytheas. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. – Springer, 2002.

[5] Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984.

[6] Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. — М.: Наука, 1989.

[7] Карацуба А.А. Дробные доли специального вида функций // Известия РАН, сер.матем. — 1995. — Т. 59. — С. 61–88.

[8] Карацуба А.А., Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных // Математические заметки. — 1979. — Т. 25. — С. 3–14.

циальные)[9,10], а медленно растущие линейные последовательности, кроме дробных долей $\{n\alpha\}$, изучались мало.

В 1921 году при изучении последовательностей $\{n\alpha\}_{n=0}^{\infty}$ Э. Гекке[11] для произвольной иррациональности ввел класс множеств ограниченного остатка. Изучением этих множеств занимались А. Островский, П. Эрдеш, Х. Кестен и другие математики. Было найдено[12] необходимое и достаточное условие для интервалов ограниченного остатка. Первая оценка остаточного члена проблемы распределения дробных долей $\{n\alpha\}$ была получена Э. Гекке. Существуют[13,14,15] различные примеры улучшений этой оценки при некоторых α и h. А.В. Шутовым[16] получены точные по порядку оценки остаточного члена для всех α и h. При этом точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы Гекке-Кестена распределения дробных долей $\{n\alpha\}$ и алгоритм их вычисления найдены не были.

Вложение в n-мерные решетки решеток меньшей размерности — это классическая задача теории квадратичных форм[17,18,19]. Вложение решеток в решетки эквивалентно их вложению в периодические разбиения. При моделировании квазикристаллических конструкций возникает вопрос о вложении решеток в квазипериодические разбиения[20]. Но этот важный для теории чисел вопрос оставался открытым.

Цель работы

Целью работы является изучение распределения квазирешеток, а также получение приложений этих результатов к решению проблемы Гекке-Кестена распределения дробных долей $\{n\alpha\}$, к описанию теоретико-числового спектра и к

[9]Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. — М.: Наука, 1989.

[10]Постников А.Г. Избранные труды. — М.:Физматлит, 2005.

[11]Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. — 1921. — V. 5. — P. 54–76.

[12]Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. — 1966. — V. 12. — P. 193–212.

[13]Журавлев В.Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Известия РАН, сер. матем. — 2007. — Т. 71. — №2. — С. 287–321.

[14]Мануйлов Н.Н. Число попаданий точек последовательности $\{n\tau_g\}$ в полуинтервал // Чебышевский сборник. — 2004. — Т. 5. — Вып. 3. — С. 72–81.

[15]Шутов А.В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. — 2004. — Т. 5. — Вып. 3. — С. 112–121.

[16]Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей $n\alpha$ на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. — 2007. — №7. — С. 168–175.

[17]Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[18]Венков Б.А. Элементарная теория чисел. – М, 1937.

[19]Журавлев В.Г. Вложение p-элементарных решеток // Изв. РАН. Сер. матем. — 1999. — Т. 63. — №1. — С. 77–106.

[20]Baake M., Joseph D., Kramer P., Schlottmann M. Root lattices and quasicrystals// J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — V. 23. — P. 1037–1041.

изучению вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения.

Научная новизна

В диссертации вводится новый класс одномерных квазипериодических разбиений, обобщающих разбиения Фибоначчи. Впервые изучено вложение решеток (арифметических прогрессий) в одномерные квазипериодические разбиения. Получено полное описание сильно и слабо вкладывающихся решеток. В случае некоторых иррациональностей (классические разбиения Фибоначчи, разбиения, порождаемые четно-фибоначчевыми числами и др.) вычислены основные характеристики сильно и слабо вкладывающихся решеток.

Для случая интервалов рассматриваемых одномерных квазипериодических разбиений получены явные формулы и алгоритм вычисления точных значений максимума и минимума остаточного члена проблемы Гекке-Кестена распределения дробных долей $\{n\alpha\}$, оценена вычислительная сложность этого алгоритма. Изучены соответствующие верхние и нижние грани, как функции иррационального α.

Получено описание теоретико-числового спектра квазирешеток в случае некоторых иррациональностей. Найдены необходимое и достаточное условия принадлежности действительных чисел спектру квазирешеток.

Вычислены для квазирешеток значения функции распределения по произвольному модулю.

Основные методы исследования

В диссертации используются следующие методы: метод параметризаций одномерных квазипериодических разбиений, который позволяет исследование одномерных квазипериодических структур связать с арифметикой иррационального поворота окружности; метод вложения решеток; методы аналитической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты и развитые в ней методы носят теоретический характер и могут быть использованы в теории чисел, теории квазикристаллов. Могут применяться в научных исследованиях, проводимых в МГУ, Санкт-Петербургском отделении МИ РАН им. В.А. Стеклова, Хабаровском отделении Института прикладной математики ДВО РАН, ТГПУ, ВГГУ.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на XVII Международной летней школе-семинаре "Волга – 17'05" по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения) (Казань, 2005 г.), XIII

Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2006 г.), XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006 г.), Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию проф. В.Е. Воскресенского (Самара, 2007 г.), на научных конференциях профессорско-преподавательского состава ВГПУ (2006-2007 гг., секция "Алгебра и теория чисел"), а также неоднократно обсуждались на научном семинаре по теории чисел ВГПУ под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.Г. Журавлева.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[9], в том числе одна работа — в журнале из перечня ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержащих 13 параграфов и списка литературы из 61 наименования, включая работы автора. Объем диссертации составляет 126 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность и указывается степень разработанности проблемы, формулируется цель исследования и указываются основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации изучается вопрос о сильном вложении решеток в разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, порождаемые квазирешетками. Пусть решетка — арифметическая прогрессия вида $L = \{h_0 + nh_L\}$, где $n = 0, 1, 2, \dots.$ Будем говорить, что решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если каждый интервал разбиения содержит единственную точку решетки L.

В первом параграфе определяются одномерные квазипериодические разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, состоящие из интервалов двух типов, порождаемые квазирешеткой $\{x_n^{(\beta)}\}$ на положительном действительном луче. Пусть $I_1 = [0; \beta)$ и $I_2 = [\beta; 1)$. Тогда квазирешетка $\{x_n^{(\beta)}\}$ определяется по правилу:

$$x_{-1}^{(\beta)} = 0,$$

$$x_n^{(\beta)} = \begin{cases} x_{n-1}^{(\beta)} + l_1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in I_1, \\ x_{n-1}^{(\beta)} + l_2, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in I_2, \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ - дробная доля.

Также первый параграф посвящен изучению основных свойств и характеристик сильно вкладывающихся в разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ решеток для случая произвольного β, определяющего квазирешетку $\{x_n^{(\beta)}\}$. В теореме 1.1 доказано, что если решетка $L = \{h_0 + nh_L\}$ сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, то

$$h_L = l_1\beta + l_2(1-\beta). \tag{1}$$

Из этого следует, что решетка, которая сильно вкладывается в разбиение, единственна с точностью до параллельного переноса.

В предложении 1.4 получено необходимое условие сильного вложения решеток, в котором описаны допустимые границы нулевого члена h_0 арифметической прогрессии (решетки).

Пусть функция $N(\alpha, n, I)$ определяет количество точек последовательности $\langle i\alpha \rangle$, попадающих в интервал I:

$$N(\alpha, n, I) = \#\{i : 0 \le i < n, \langle i\alpha \rangle \in I\}.$$

Величина $r(\alpha, n, I)$, называемая остаточным членом проблемы равномерного распределения дробных долей, определяется по формуле:

$$r(\alpha, n, I) = N(\alpha, n, I) - n|I|.$$

В теореме 1.4 доказано необходимое и достаточное условие сильного вложения решеток. Пусть $r_1^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_1} r(\alpha, n, I_1), r_1^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_1} r(\alpha, n, I_1)$, $r_2^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_2} r(\alpha, n, I_1), r_2^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_2} r(\alpha, n, I_1)$. Определим функции

$$l_{max} = \begin{cases} l_1, & \text{если } l_1 > l_2, \\ l_2, & \text{если } l_2 > l_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_{min} = \begin{cases} l_1, & \text{если } l_1 < l_2, \\ l_2, & \text{если } l_2 < l_1. \end{cases}$$

Теорема 1.4. *Решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняются три условия.*

1. При $l_1 > l_2$:

1) $r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$;

2) $r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}$;

3) $r_1^+ - r_2^- < \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$, если $r_1^- > r_2^-$;

$r_2^+ - r_1^- < \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}$, если $r_2^- > r_1^-$.

2. При $l_2 > l_1$:

1) $r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$;

2) $r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}$;

3) $r_2^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$, если $r_1^+ < r_2^+$;

$r_1^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{max}-l_{min}}$, *если* $r_2^+ < r_1^+$.

Данная теорема позволяет получить необходимые и достаточные условия сильной вложимости решетки L в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых частных значениях $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, если известны оценки для $r(\alpha, n, I_1)$.

В теоремах 1.5, 1.10 и 1.11 доказан ряд достаточных условий сильного вложения решеток.

Также в теореме 1.2 первого параграфа доказано, что если $\beta \notin \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, то при любых l_1 и l_2 не существует сильно вкладывающейся решетки.

Второй параграф первой главы диссертации посвящен описанию свойств сильно вкладывающихся решеток для частного случая разбиений $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, когда $\beta = 1 - \alpha$. Здесь также в теоремах 1.15 и 1.16 получено описание сильно вкладывающихся решеток соответственно в разбиения, порождаемые четнофибоначчевыми числами и в классические разбиения Фибоначчи.

В третьем и четвертом параграфах первой главы диссертации рассмотрены сильно вкладывающиеся решетки в частных случаях разбиений $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, когда $\beta = \langle 2\alpha \rangle$ и $\beta = \langle 3\alpha \rangle$.

Вторая глава диссертации посвящена изучению вопроса о слабом вложении решеток. Будем говорить, что решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если каждый длинный интервал разбиения содержит единственную точку решетки L, а короткие интервалы разбиения не содержат точек решетки L.

В параграфе 1 получены основные свойства и характеристики слабо вкладывающихся в разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ решеток для случая произвольного β. В теореме 2.1 доказано, что если решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, то h_L представимо в виде

$$h_L = \frac{l_1\beta + l_2(1-\beta)}{\Delta},$$

где $\Delta = [l_1 > l_2]\beta + [l_2 > l_1](1-\beta)$, причем $[x > y] = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \le y. \end{cases}$ В теореме 2.2 описаны допустимые границы нулевого члена прогрессии (решетки) h_0. Доказано необходимое и достаточное условие слабого вложения решеток.

Теорема 2.3. *Решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n r(\alpha, n, I_1) - \inf_n r(\alpha, n, I_1) < \Delta\lambda, \text{ где } \lambda = \frac{l_{max}}{l_{min}}.$$

Данная теорема позволяет получить необходимые и достаточные условия слабой вложимости решетки L в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых частных значениях β, если известны оценки для остатка $r(\alpha, n, I_1)$. В теоремах 2.4, 2.5 и 2.6 доказан ряд достаточных условий слабого вложения решеток.

Второй параграф второй главы диссертации посвящен описанию свойств слабо вкладывающихся решеток для частных случаев разбиений $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$: классических разбиений Фибоначчи, разбиений, порождаемых четно-фибоначчевыми числами, случаев, когда $\beta = 1 - \alpha$, $\beta = \langle 2\alpha \rangle$, $\beta = \langle 3\alpha \rangle$.

В третьей главе диссертации получены точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей $r(\alpha, n, I_1)$.

В первом параграфе приводятся некоторые свойства функций кусочно-линейных на отрезке $[0;1]$, поскольку в основу исследования функции $r(\alpha, n, I_1)$ были положены понятие и свойства кусочно-линейных на отрезке $[0;1]$ функций.

Во втором параграфе кусочно-линейная на отрезке $[0;1]$ функция $r(\alpha, n, I_1)$ рассматривается как функция от $\langle n\alpha \rangle$. В предложениях 3.4 и 3.5 получены явные формулы для вычисления значений функций $N(\alpha, n, I_1)$ и $r(\alpha, n, I_1)$ в случае, когда $I_1 = [\delta; \delta + \langle m\alpha \rangle)$. На их основе получены явные формулы для $\sup_n r(\alpha, n, I_1)$ и $\inf_n r(\alpha, n, I_1)$.

Введем следующее обозначение:

$$C_m(\alpha, x) = \sum_{i=1}^{m} \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle.$$

Определим функции: $\langle x \rangle^* = \begin{cases} \langle x \rangle, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ $C^*_m(\alpha, x) = \sum_{i=1}^{m} \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle^*$. Функция $\langle x \rangle$ — непрерывна слева, а функция $\langle x \rangle^*$ — непрерывна справа в точках $x_0 \in \mathbb{Z}$. Функция $C_m(\alpha, x)$ — непрерывна слева, а функция $C^*_m(\alpha, x)$ — непрерывна справа в точках $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$. В теореме 3.1 получена точная формула для вычисления наибольшего значения функции $r(\alpha, n, I_1)$.

Теорема 3.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sup_n r(\alpha, n, I_1) = \langle m\alpha \rangle + \max_{j=1,\dots,m} C^*_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle) - C_m(\alpha, 0).$$

В теореме 3.2 получен аналогичный результат для вычисления наименьшего значения функции $r(\alpha, n, I_1)$.

Теорема 3.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\inf_n r(\alpha, n, I_1) = \langle m\alpha \rangle + \min_{j=1,\dots,m} C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle) - C_m(\alpha, 0).$$

В случае, когда $\delta = 0$, то есть при $I_1 = [0, \langle m\alpha\rangle)$, для функций, определенных следующим образом:

$$r_1^+ = \sup_{n, \langle n\alpha\rangle \in I_1} r_1(\alpha, n), r_1^- = \inf_{n, \langle n\alpha\rangle \in I_1} r_1(\alpha, n),$$

$$r_2^+ = \sup_{n, \langle n\alpha\rangle \in I_2} r_1(\alpha, n), r_2^- = \inf_{n, \langle n\alpha\rangle \in I_2} r_1(\alpha, n)$$

получены точные значения.

Предложение 3.12. *Справедливы следующие равенства:*

$$r_1^+ = \max_{j=0,\ldots,m-1: \langle j\alpha\rangle \in [0; \langle m\alpha\rangle]} C_m^*(\alpha, \langle j\alpha\rangle) - C_m(\alpha, 0),$$

$$r_1^- = \min_{j=0,\ldots,m: \langle j\alpha\rangle \in [0; \langle m\alpha\rangle]} C_m(\alpha, \langle j\alpha\rangle) - C_m(\alpha, 0),$$

$$r_2^+ = \max_{j=0,\ldots,m: \langle j\alpha\rangle \in [\langle m\alpha\rangle; 1]} C_m^*(\alpha, \langle j\alpha\rangle) - C_m(\alpha, 0),$$

$$r_2^- = \min_{j=0,\ldots,m-1: \langle j\alpha\rangle \in [\langle m\alpha\rangle; 1]} C_m(\alpha, \langle j\alpha\rangle) - C_m(\alpha, 0).$$

Точные формулы, полученные в теоремах 3.1, 3.2 и предложении 3.12, позволяют решить вопрос о сильной и слабой вложимости решеток в разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых $\beta = \langle m\alpha\rangle$, на основе необходимых и достаточных условий, полученных в теоремах 1.4, 2.3.

В предложениях 3.11 и 3.13 доказано, что существует алгоритм вычисления значений функций $\sup_n r(\alpha, n, I_1)$, $\inf_n r(\alpha, n, I_1)$, r_1^+, r_1^-, r_2^+ и r_2^- за $O(m)$ операций.

В третьем параграфе $r(\alpha, n, I_1)$ рассматривается как функция от α, получены оценки количества точек нелинейности функций $\sup_n r(\alpha, n, I_1)$ и $\inf_n r(\alpha, n, I_1)$, как функций от аргумента α, где $I_1 = [\delta; \delta + \langle m\alpha\rangle)$.

В четвертой главе диссертации исследуется теоретико-числовой спектр и распределение последовательности $\{x_n^\beta\}$ в случае, когда $\beta = 1 - \alpha$ (обозначим эту последовательность как $\{x_n\}$), по произвольному модулю h такому, что

$$h = \frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{(l-k)\alpha + k}, \text{ где } l, k \in \mathbb{Z},\ k^2 + l^2 \neq 0.$$

В первом параграфе четвертой главы приведены основные понятия и свойства равномерного распределения последовательности по произвольному модулю h, полученные на основе классических результатов Г. Вейля для равномерного распределения по модулю 1[21,22,23]. Обозначим через E_h интервал $[\frac{a}{h}, \frac{b}{h})$, если $E = [a, b)$. Очевидно, что $|E_h| = \frac{|E|}{h}$. Обозначим целую часть по модулю h, как $[x]_h = h[\frac{x}{h}]$. Определим символ $\langle x \rangle_h$, как единственное число y, удовлетворяющее двум условиям: 1) $0 \le y < h$, 2) $y \equiv x (mod\ h)$. Другими словами $\langle x \rangle_h = x - [x]_h$. Введем функцию $N_h(E_h, n, \{x_n\})$:

$$N_h(E_h, n, \{x_n\}) = \sharp\{0 \le i < n : \langle x_i \rangle_h \in E_h\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю h, если для любой пары действительных чисел a и b, удовлетворяющих условию $0 \le a < b \le h$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_h([a, b), n, \{x_n\})}{n} = \frac{b - a}{h} = \frac{|E|}{h}.$$

В параграфе 3 рассматривается последовательность $\{x_n\}$ по модулю h вида $h = \frac{l_1(1-\alpha)+l_2\alpha}{(l-k)\alpha+k}$, где l и k — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию $k^2 + l^2 \ne 0$. Для описания неравномерности распределения последовательности по такому модулю вводится функция распределения $\nu(\varepsilon)$ при $h_0 > 0$: $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{h_0}(\varepsilon[h_0]_h + \min\{\varepsilon, \langle h_0 \rangle_h\})\}$ и при $h_0 < 0$: $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{|h_0|}([|h_0|]_h\varepsilon + \max\{0, \varepsilon - (h - \langle |h_0| \rangle_h)\})$, где $h_0 = \frac{l_1 l - l_2 k}{(l-k)\alpha+k}$. В теоремах 4.7 и 4.8 дается описание распределения последовательности $\{x_n\}$ по модулю h с помощью данной функции.

Теорема 4.7. *Пусть* $h_0 > 0$. *Тогда*

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{h_0}([h_0]_h + 1), & \textit{если } \varepsilon \in [0; \langle h_0 \rangle_h), \\ \frac{1}{h_0}(\varepsilon[h_0]_h + \langle h_0 \rangle_h), & \textit{если } \varepsilon \in [\langle h_0 \rangle_h; h). \end{cases}$$

Теорема 4.8. *Пусть* $h_0 < 0$. *Тогда*

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|h_0|}[|h_0|]_h, & \textit{если } \varepsilon \in [0; h - \langle |h_0| \rangle_h), \\ \frac{1}{|h_0|}(\varepsilon([|h_0|]_h + 1) - h + \langle |h_0| \rangle_h), & \textit{если } \varepsilon \in [h - \langle |h_0| \rangle_h; h). \end{cases}$$

Данные теоремы показывают, что интервал $[0; h)$ разбивается точкой $\langle |h_0| \rangle_h$ на два подинтервала, на каждом из которых рассматриваемое распределение равномерно. В частном случае, когда $|h_0| = h$, рассматриваемое распределение

[21] Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. — 1910. — V. 30. — P. 377–407.

[22] Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю 1 // Вейль Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1984. – С. 58 – 93.

[23] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

равномерно на всем интервале $[0;h)$. В случае, когда $h_0>0$ и $h_0<h$ точки квазирешетки $\{x_n\}$ распределены равномерно и сосредоточены лишь на интервале $[0;h_0)$; когда $h_0<0$ и $|h_0|<h$ точки квазирешетки $\{x_n\}$ распределены равномерно и сосредоточены только на интервале $[h-|h_0|;h)$.

В предложениях 4.18 и 4.19 дано интегральное представление функции распределения $\nu(\varepsilon)$.

В параграфе 2 четвертой главы вводится понятие множества $Spec$ — теоретико-числового спектра одномерного квазипериодического разбиения. Получены некоторые свойства множеств $Spec$ и $Spec^*$. Определим последовательность $\{y_n\}$ соотношениями

$$y_{-1}=0,$$
$$y_{n+1}=\begin{cases}\langle y_n+l_1\rangle_h, & \text{если } \langle n\alpha\rangle\in[0;1-\alpha),\\ \langle y_n+l_2\rangle_h, & \text{если } \langle n\alpha\rangle\in[1-\alpha;1).\end{cases}$$

Отметим, что $y_n=\langle x_n\rangle_h$.

Рассмотрим множество $Y(h)$ такое, что $Y(h)=\overline{\{y_n\}}$, где черта обозначает замыкание множества. Очевидно, что $Y(h)\subseteq[0;h)$. Обозначим множество $Y_\varepsilon(h)=[0,\varepsilon)$. Будем говорить, что $h\in Spec$, если выполняется условие $Y(h)\neq[0;h)$. В предложении 4.8 доказано, что если $h\in Spec$, то и $mh\in Spec$ при любом целом m.

Будем говорить, что $h\in Spec^*$, если последовательность $\{x_n\}$ не является равномерно распределенной по модулю h. Очевидно, что $Spec\subseteq Spec^*$. В следствии 4.2 показано, что почти все действительные $h\notin Spec^*$.

В.Г. Журавлевым[24] был изучен дифракционный спектр четно-фибоначчевых чисел. В диссертации рассматривается более широкий класс последовательностей. Дифракционным спектром DiffSpec последовательности $\{x_n\}$ будем называть максимальное подмножество X из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, для которого выполняется условие для всех $\lambda\in X$

$$f(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi i x_j\lambda)\neq 0.$$

Используя методы, примененные В.Г. Журавлевым для четно-фибоначчевых чисел, в теореме 4.6 получено описание всех действительных чисел h из множеств $Spec$ и $Spec^*$.

Теорема 4.6. *Если $h\in Spec^*$, то h можно представить в виде*

$$h=m\frac{l_1(1-\alpha)+l_2\alpha}{(l-k)\alpha+k},$$

[24] Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — №3. — С. 18–46.

где m, l, k — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию $k^2+l^2 \neq 0$.

В четвертом параграфе на основе свойств функции распределения $\nu(\varepsilon)$ последовательности $\{x_n\}$ по произвольному модулю h, исследованных в параграфе 3, получены в теоремах 4.9 и 4.10 достаточные условия попадания действительного числа h во множества $Spec$ и $Spec^*$.

Теорема 4.9. *Если выполняется условие*

$$\Delta = |l_1 l - l_2 k| < l_1(1-\alpha) + l_2\alpha,$$

где l, k — произвольные целые числа такие, что $k^2 + l^2 \neq 0$, то при любом целом m, отличном от нуля, действительное число

$$h = m\frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{(l-k)\alpha + k}$$

принадлежит множеству $Spec$.

Теорема 4.10. *Если выполняется условие*

$$\Delta = |l_1 l - l_2 k| \neq l_1(1-\alpha) + l_2\alpha,$$

где l, k — произвольные целые числа такие, что $k^2 + l^2 \neq 0$, то при любом целом m, отличном от нуля, действительное число

$$h = m\frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{(l-k)\alpha + k}$$

принадлежит множеству $Spec^*$.

В заключение, автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Георгиевичу Журавлеву за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Получено полное описание сильно и слабо вкладывающихся решеток в одномерные квазипериодические разбиения.

2. Вычислены основные характеристики сильно и слабо вкладывающихся решеток для некоторых иррациональностей.

3. Получены точные значения и алгоритм вычисления максимума и минимума остаточного члена проблемы Гекке-Кестена распределения дробных долей $\{n\alpha\}$. Оценена вычислительная сложность этого алгоритма. Изучены соответствующие верхние и нижние грани, как функции иррационального α.

4. Изучен теоретико-числовой спектр квазирешеток в случае некоторых иррациональностей.

5. Вычислены значения функции распределения квазирешетки по произвольному модулю.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, включенных в перечень ВАК

[1] *Красильщиков, В.В.* Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. — 2007. — №7. — С. 84–91.

Другие публикации

[2] *Красильщиков, В.В.* Одномерные квазикристаллы: аппроксимация периодическими структурам и вложение решеток / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Новейшие проблемы теории поля (Труды XVII Международной летней школы-семинара "Волга – 17'05" по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения)). — Казань: Изд-во КГУ, 2006. — Т. 5. — С. 145–154.

[3] *Красильщиков, В.В.* Одномерные квазипериодические разбиения: вложение решеток / В.В. Красильщиков // Сборник трудов молодых ученых ВГПУ. — Владимир: Нерль, 2006. — Вып. 6.— С. 89.

[4] *Красильщиков, В.В.* О распределении некоторой последовательности по переменному модулю / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". — Москва: Изд-во МГУ, 2006. — Т. IV. — С. 85–86.

[5] *Красильщиков, В.В.* О распределении последовательности по переменному модулю / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. — Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2006. — С. 90–93.

[6] *Красильщиков, В.В.* Об одном классе прогрессий, вкладывающихся в одномерные квазипериодические разбиения / В.В. Красильщиков // Чебышевский сборник. — 2006. – Т. 7. — Вып. 1. — С. 239–245.

[7] *Красильщиков, В.В.* Вложение решеток в квазипериодические решетки / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сборник научных трудов. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2007. — Вып. 4. — С. 45–55.

[8] *Красильщиков, В.В.* Вложение решеток в одномерные квазипериодические разбиения / В.В. Красильщиков // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е. Воскресенского, Самара, Россия, 21–25 мая, 2007: тез. докл. — Самара: Изд-во "Универс групп", 2007. — С. 30–31.

[9] *Красильщиков, В.В.* О некоторых свойствах одномерных квазипериодических разбиений / В.В. Красильщиков // Инновационные методы и технологии в кооперативном образовании: материалы научной конференции профессорско-преподавательского состава, сотрудников и аспирантов кооперативных вузов России. — Владимир: ВФ РУК, 2008. — С. 78–80.

Подписано в печать
Усл. печ. л. 1,0
Заказ

Формат 60×84 1/16
Уч. изд. л. 1,0
Тираж 100

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной полиграфии ВГГУ, 600024, г.Владимир, ул. Университетская, 2