На правах рукописи

Нестеров Павел Николаевич

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2006

Работа выполнена на кафедре математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Глызин Сергей Дмитриевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Майоров Вячеслав Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор Мухамадиев Эргашбой

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится «____»__________ 2006 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 212.002.04 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «____»__________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

К линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами приводят многие практические задачи, например, физики и техники. Хорошо известно, что решения таких уравнений удается получить лишь в очень редких случаях. Поэтому при исследовании такого рода задач приходится использовать либо какие-то результаты качественного характера, либо прибегать к методам приближенного интегрирования. В данном исследовании разрабатывается методика, позволяющая получать асимптотические формулы для решений линейных систем дифференциальных и разностных уравнений в окрестности точки $t = +\infty$.

Среди приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений особое место занимают асимптотические методы. В основе этих методов лежит идея о возможности разложения искомого решения в формальный ряд по степеням малого параметра. Несмотря на то, что такие ряды обычно являются расходящимися, решение, получаемое обрывом формальных рядов на n–ом члене, оказывается весьма удовлетворительным в практических расчетах. Основы асимптотических методов заложили Ж. Фурье, Ж. Лиувилль, Ж. Штурм. Большой вклад в развитие асимптотического представления решений дифференциальных уравнений был сделан А. Пуанкаре. Дальнейшему развитию в этой области способствовали работы В.А. Стеклова, Г. Биркгофа, Л. Шлезингера, В.И. Тржицинского и др. Существенные результаты получили такие исследователи, как В. Вазов и Л. Чезари. Среди дифференциальных уравнений, довольно часто встречающихся на практике, следует отметить уравнения с медленно меняющимися коэффициентами, к которым, в частности, относятся уравнения с малым параметром при старших производных (сингулярно возмущенные уравнения). В этом направлении укажем на работы С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиля. Подобным уравнениям посвящены многие работы А.Н. Тихонова и А.Б. Васильевой, а также их учеников.

Особую роль в развитии асимптотических приемов сыграли работы Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. В частности, ими были разработаны методы для приближенного интегрирования нелинейного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\Big(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon, t\Big),$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Приближенные формулы, получаемые с помощью методики Крылова-Боголюбова, не содержат так называемых секулярных членов, в результате чего удается провести исследование колебательного процесса на асимптотически большом отрезке времени t. Основываясь на работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, И.З. Штокало разработал метод, позволяющий исследовать устойчивость линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами. Г.И. Бирюк распространила результаты И.З. Штокало на случай нелинейных дифференциальных уравнений.

Другое направление в развитии асимптотических методов было связано с возможностью получения асимптотических формул для решений некоторого класса линейных систем в окрестности точки $t = +\infty$. Основополагающие работы здесь принадлежат Н. Левинсону. Он показал, что при определенных предположениях относительно функций $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ (условия дихотомии), фундаментальная матрица $X(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{1}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$, допускает следующее асимптотическое представление при $t \to +\infty$:

$$X(t) = \Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}.$$

Системы типа (1), следуя И.М. Рапопорту, называют L–*диагональными.* Результаты Левинсона были сразу же использованы И.М. Рапопортом в спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов. Рапопорт ввел также некоторые подстановки, приводящие отдельные типы уравнений к виду (1). Идея метода приведения к L–диагональной форме в отдельных случаях применялась уже О. Перроном и Л. Чезари. М.А. Наймарк применил теоремы об асимптотике решений систем дифференциальных уравнений для исследования индекса дефекта симметрических дифференциальных операторов на полуоси. Более общие результаты этого типа были получены в работах М.В. Федорюка и А. Девинаца.

Возможность представления фундаментальной матрицы $X(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

в виде

$$X(t) = P(t)\Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}, \qquad t \to +\infty$$

стала основной тематикой целого ряда статей В.А. Харриса и Д.А. Латса. Задача здесь заключалась в построении матрицы $P(t)$ такой, что замена $x = P(t)y$ приводила бы систему (2) к виду (1). Существенная роль здесь отводится так называемому Q–преобразованию

$$x = \big(I + Q(t)\big)y,$$

где $Q(t) = o(1)$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{diag} Q(t) \equiv 0$. Такая замена в некоторых случаях позволяет улучшить исходную систему в том смысле, что к преобразованной системе уже может быть применена теорема Левинсона. В.А. Харрис и Д.А. Латс рассмотрели различные ситуации, в которых удается подходящим образом выбрать матрицу $Q(t)$. Метод, развитый Харрисом и Латсом, в дальнейшем использовался многими авторами для исследовании задачи об асимптотическом интегрировании линейных систем ОДУ.

Особенную сложность процесс приведения к L–диагональной форме приобретает в тех случаях, когда исходная система содержит осциллирующие величины. В этом отношении особенное значение имеет класс систем с колебательно убывающими коэффициентами. К такого рода системам приводит достаточно широкий круг прикладных задач. Некоторые возможные подходы к изучению систем с колебательно убывающими коэффициентами были предложены Ю.А. Самохиным и В.Н. Фоминым, а также Дж. С. Касселем. В работах И.З. Штокало изучался вопрос об устойчивости нулевого решения следующей линейной системы:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{l=1}^{k} \varepsilon^l A_l(t) + \varepsilon^{k+1} F(t, \varepsilon)\Big) x, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, A_0 — постоянная квадратная матрица, все собственные значения которой вещественны; $A_l(t)$, $(l = 1, \dots, k)$ — квадратные матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены; $F(t, \varepsilon)$ – матрица, элементами которой являются функции, почти периодичные по t равномерно относительно $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и непрерывные по ε в интервале $[0, \varepsilon_0]$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Основываясь на работах Н.Н. Боголюбова, И.З. Штокало построил замену, переводящую систему (3) в систему, которая в главной части не содержит осциллирующих коэффициентов. Впервые на возможность использования замен типа тех, которые использовал И.З. Штокало для исследования систем с малым параметром, применительно к системам с колебательно убывающими коэффициентами указали В.Ш. Бурд и В.А. Каракулин. Предложенный ими подход позволил довольно простым путем получить асимптотические формулы, например, для решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Big(1 + \frac{1}{t^\alpha} \sin \lambda t\Big) y = 0,$$

где λ, α — вещественные числа и $0 < \alpha \le 1$. В методике, предложенной В.Ш. Бурдом и В.А. Каракулиным, предполагается, что существует лишь одна убывающая составляющая, т.е. функция $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, играющая роль малого параметра ε в методе Штокало. Дальнейшие исследования в этой области показали, что для систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами такая ситуация, в общем-то, не является типичной. Достаточно рассмотреть, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + B(t)V(t) + R(t)\Big)x,$$

где A_0 — постоянная матрица размера $m \times m$, элементами матрицы $B(t)$ размера $m \times p$ являются тригонометрические многочлены, матрица $R(t)$ размера $m \times m$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$, а матрица $V(t)$ размера $p \times m$ стремится к 0 при $t \to +\infty$. Напомним, что $f(t) \in L_1[t_0, \infty)$, если

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |f(s)| ds < \infty.$$

В случае же, когда $R(t)$ — матрица произвольных размеров, то запись $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ означает, что $f(t) = \|R(t)\| \in L_1[t_0, \infty)$, где $\| \cdot \|$ — некоторая матричная норма.

В этой диссертационной работе предложен общий вид усредняющего преобразования для упрощения систем с колебательно убывающими коэффициентами. Эффективность соответствующих преобразований продемонстрирована на примере задачи асимптотического интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Исторически сложилось так, что разностным уравнениям уделялось значительно меньше внимания, нежели дифференциальным уравнениям. В последнее время в связи с появлением целого ряда задач, в которых дискретные системы оказываются более адекватными математическими моделями, ситуация стала меняться. Как оказывается, многие результаты, полученные для дифференциальных уравнений, могут быть с небольшими изменениями перенесены и на разностный случай. Но даже тогда, когда это действительно было возможно, разностные уравнения во многих аспектах все равно оказывались более сложным объектом для изучения. Асимптотические приемы исследования применительно к разностным уравнениями стали использоваться уже в конце XIX — начале XX века в работах А. Пуанкаре и О. Перрона. Затем довольно продолжительное время в этой области наблюдалось затишье, пока соответствующие задачи не привлекли внимания целого ряда ученых. Здесь следует отметить работы М.А. Евграфова, А.О. Гельфонда и И.М. Кубенской, Коффмана и др. Попытки сформулировать разностный аналог теоремы Левинсона восходят к работам И.М. Рапопорта. Его идеи получили свое продолжение в работах П.И. Коваля. Несмотря на то, что разностный аналог теоремы Левинсона, в сущности, был получен уже Рапопортом, его результаты были неизвестны не только западным ученым, но и в советских научных кругах о них мало кто знал. И, как это нередко случается в математике, похожие результаты были заново получены (правда, с использованием уже других рассуждений) лишь через три десятилетия. Бензаид и Латс, основываясь на результатах, полученных В.А. Коппелем для линейных дифференциальных уравнений, сформулировали дискретный аналог теоремы Левинсона. Естественно, что для разностных уравнений возникает та же задача, что и для дифференциальных. С помощью каких преобразований и какие системы могут быть приведены к тому виду, который бы позволил воспользоваться дискретным вариантом теоремы Левинсона? Наиболее очевидное решение этой задачи состоит в том, чтобы попытаться распространить соответствующие результаты, полученные для дифференциальных уравнений, и на случай разностных. Как оказывается, для построения асимптотики решений довольно широкого класса линейных систем разностных уравнений целесообразно использовать идеи метода усреднения.

Цель работы

Основной целью данной диссертационной работы является развитие идей метода усреднения применительно к задаче построения асимптотики решений линейных систем дифференциальных и разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Соответствующая методика применяется для изучения конкретных моделей, представляющих практический интерес.

Методы исследования

В основе исследования лежат результаты, полученные Н.Н. Боголюбовым и И.З. Штокало в области методов усреднения и развитые в дальнейшем В.Ш. Бурдом и В.А. Каракулиным[1] применительно к задаче асимптотического интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Кроме того, для получения асимптотики используется фундаментальный результат Н. Левинсона[2], а также его последующие аналоги[3] и обобщения[4].

Научная новизна работы

В данной диссертационной работе предложен общий вид усредняющего преобразования для упрощения систем линейных дифференциальных и разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Эффективность соответствующих преобразований продемонстрирована на примере задачи построения асимптотики решений систем линейных дифференциальных и разностных уравнений с переменными коэффициентами.

---

[1] *Бурд В.Ш., Каракулин В.А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №5. С. 658–666.

[2] *Levinson N.* The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 111 – 126.

[3] *Benzaid Z., Lutz D.A.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195 – 221.

[4] *Coppel W.A.* Dichotomies in Stability Theory. Springer-Verlag, New York, 1978.

Положения, выносимые на защиту

1. Предложен общий вид усредняющего преобразования для упрощения систем с колебательно убывающими коэффициентами.

2. Исследовано асимптотическое поведение решений некоторых уравнений из класса адиабатических осцилляторов.

3. Построена асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом специального вида при нулевой энергии.

4. Изучено асимптотическое поведение решений системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью при $t \to +\infty$.

5. Результаты, полученные для дифференциальных уравнений, перенесены на разностный случай. Дискретный вариант методики усреднения проиллюстрирован на примере построения асимптотики решений некоторых разностных уравнений второго порядка.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Ее основные результаты могут быть использованы для анализа конкретных математических моделей, как с непрерывным так и с дискретным временем. Достоинством изложенной методики является то, что с помощью нее удается получать как результаты качественного, так и количественного характера более простым образом и производя меньший объем вычислений, нежели при использовании некоторых альтернативных асимптотических приемов.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XXVII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, 2005;

2. XXVIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, 2006 (В рамках общеуниверситетской конференции молодых ученых «Ломоносов-2006».);

3. Международная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, МГУ, 2006;

4. VIII Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2006), Крым, Алушта, 2006.

Кроме того, результаты диссертации докладывались на ряде семинаров кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, а также обсуждались на семинаре «Моделирование и исследование нейронных сетей» кафедры компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 9 работ: 7 статей и 2 тезисов докладов. Из работ, выполненных совместно, в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 71 наименование. Диссертация содержит 2 рисунка и одно приложение, в котором излагаются элементы метода усреднения для динамических уравнений, заданных на временных шкалах. Общий объем диссертации составляет 116 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимого исследования, приводятся его цели и задачи. Кроме того, в нем содержится обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, а также приводится структура работы.

Первая глава носит вспомогательный характер. В разделе 1.1 излагается один из основных результатов в теории асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений — теорема Левинсона.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{4}$$

где $x(t)$ — комплекснозначный вектор размерности m, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$ — непрерывная[1]диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Мы потребуем также, чтобы для элементов матрицы $\Lambda(t)$ были выполнены следующие

[1]Достаточно, впрочем, считать, что элементы $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ матрицы $\Lambda(t)$ суммируемы в каждом конечном интервале $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$.

условия, известные как условия дихотомии: пусть для каждой пары индексов (i,j), $i \neq j$ имеет место либо

$$\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \to -\infty, \qquad t \to +\infty \tag{5}$$

и

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \leq K_1 \quad \text{для} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2, \tag{6}$$

либо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \geq K_2 \quad \text{для} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2, \tag{7}$$

где K_1, K_2 – некоторые постоянные. Заметим, что условия (5)-(7) попросту означают, что для систем вида

$$\dot{y} = \big(\Lambda(t) - \lambda_k(t)I\big)y, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

имеет место так называемая обыкновенная дихотомия решений.

Теорема 1 (Левинсон). *Пусть выполнены условия дихотомии* (5)-(7). *Тогда фундаментальная матрица* $X(t)$ L*–диагональной системы* (4) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to +\infty$:

$$X(t) = \Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{ \int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}, \quad t^* \geq t_0. \tag{8}$$

Отметим следующее условие, влекущее выполнение условий дихотомии (5)-(7), которое оказывается выполненным во многих практических задачах: для любой пары функций $(\lambda_i(t), \lambda_j(t))$ можно указать такие функции $f(t) \geq 0$, $t \geq t_0$ или $f(t) \leq 0$, $t \geq t_0$ и $g(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\big) = f(t) + g(t). \tag{9}$$

Раздел 1.2 посвящен краткому знакомству с результатами, полученными Коппелем, которые впоследствии были использованы Бензаидом и Латсом для построения разностного аналога теоремы Левинсона. Основной результат этого раздела сформулирован в виде теоремы. Рассмотрим линейную систему с переменными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{10}$$

Мы будем предполагать, что матрица $A(t)$ размера $m \times m$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}_+$. Пусть наряду с системой (10) рассматривается неоднородная возмущенная система

$$\frac{dy}{dt} = \big(A(t) + R(t)\big)y + f(t), \tag{11}$$

где $R(t)$ — непрерывная матрица, а $f(t)$ — непрерывная вектор-функция, и, кроме того, матрица $R(t)$ и функция $|f(t)|$ принадлежат классу $L_1[0, \infty)$.

Справедлива

Теорема 2 (Coppel). *Пусть система* (10) *обладает обыкновенной дихотомией на* $\mathbb{R}_+$. *Тогда существует взаимно однозначное соответствие между ограниченными решениями системы* (10) *и ограниченными решениями неоднородной системы* (11). *При этом разность между решениями, переходящими друг в друга при таком отображении, стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Из теоремы 2 можно вывести следующее утверждение: если система (10) обладает обыкновенной дихотомией на $\mathbb{R}_+$, тогда возмущенная однородная система (11) ($f(t) \equiv 0$) также обладает обыкновенной дихотомией на $\mathbb{R}_+$. Таким образом, обыкновенная дихотомия на полуоси $\mathbb{R}_+$ является грубой по отношению к возмущениям класса $L_1[0, \infty)$. В конце этого раздела показывается, что теорема Левинсона является простым следствием теоремы 2.

В разделе 1.3 рассматриваются некоторые простейшие способы приведения линейных систем дифференциальных уравнений к L–диагональному виду. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + V(t) + R(t)\Big)x, \tag{12}$$

где A_0 — постоянная матрица с различными собственными значениями, матрица $V(t)$ стремится к нулевой матрице при $t \to \infty$, а матрицы $\dot{V}(t)$ и $R(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Пусть $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, на диагонали которой находятся собственные числа $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$ матрицы $A_0 + V(t)$. Имеет место так называемая лемма о диагонализации переменной матрицы[1]:

Лемма 1. *При достаточно больших* t *существует ограниченная матрица* $C(t)$, *имеющая ограниченную обратную* $C^{-1}(t)$ *и производную* $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$, *такая, что замена* $x = C(t)y$ *приводит систему* (12) *к* L*–диагональному виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(\Lambda(t) + R_1(t)\Big)y, \tag{13}$$

где $R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t)$ *принадлежит классу* $L_1[t_0, \infty)$.

[1] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

В этом разделе также коротко рассказывается о работах Харриса и Латса, посвященных приведению линейных систем к L-диагональному виду с помощью Q-преобразования, т.е. замены вида

$$x = \big(I + Q(t)\big)y, \tag{14}$$

где $Q(t) = o(1)$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{diag} Q(t) \equiv 0$.

Наконец, раздел 1.4 посвящен оценке члена $o(1)$ в асимптотических формулах, которые получаются с помощью теоремы Левинсона. Справедлива[2]

Теорема 3. *Пусть матрица $\Lambda(t)$ непрерывна при $t \geq t_0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ фиксировано, и для всех $1 \leq j \leq m$ существуют константы $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что или*

$$\exp\Big\{\int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds\Big\} \leq K_1 e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \qquad \text{при} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2, \tag{15}$$

или

$$\exp\Big\{\int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds\Big\} \geq K_2 \qquad \text{при} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{16}$$

Пусть матричная функция $R(t)$ порядка $m \times m$ непрерывна при $t \geq t_0$ и существует скалярная функция

$$\phi(t) \geq ||R(t)||, \qquad \phi(t) \in L_1[t_0, \infty). \tag{17}$$

Более того, если неравенство (15) выполнено хотя бы для одного j, мы потребуем, чтобы существовала константа $\beta \in [0, \alpha)$ такая, что

$$\phi(t_1)e^{\beta t_1} \leq \phi(t_2)e^{\beta t_2} \quad \text{для всех} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{18}$$

Тогда существует решение $x_k(t)$ системы (4), имеющее при $t \to +\infty$ следующую асимптотику:

$$x_k(t) = \Big[e_k + O\Big(\int\limits_t^{+\infty} \phi(\tau)d\tau\Big)\Big] \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \lambda_k(s)ds\Big\}, \qquad t^* \geq t_0. \tag{19}$$

Сформулированный результат используется для построения асимптотики фундаментальной матрицы системы

$$\frac{dx}{dt} = \Big(\sum_{j=0}^{k} t^{-\alpha_j} A_j + O\big(t^{-\varphi}\big)\Big)x,$$

[2] *Bodine S., Lutz D.A.* Asymptotic solutions and error estimates for linear systems of difference and differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. V. 290. P. 343 – 362.

где $\{A_j\}$ — постоянные матрицы, $A_k \neq 0$, $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq 1$, $\varphi > 1$.

Материал, который излагается в этом разделе, необходим для понимания формул, с которыми мы встречаемся в главах 3 и 4.

Во **второй** главе разрабатывается, собственно, методика усреднения для упрощения систем с колебательно убывающими коэффициентами. В разделе 2.1 коротко рассказывается о методе усреднения Крылова-Боголюбова, а также излагается метод Штокало исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами. И.З. Штокало занимался вопросом об устойчивости нулевого решения следующей линейной системы:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{l=1}^{k} \varepsilon^l A_l(t) + \varepsilon^{k+1} F(t,\varepsilon)\Big)x, \tag{20}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, A_0 — постоянная квадратная матрица порядка m, все собственные значения которой вещественны, $A_l(t)$, $(l = 1, \ldots, k)$ — квадратные матрицы порядка m, принадлежащие классу Σ. Мы говорим, что матрица $A(t) \in \Sigma$, если ее элементами являются тригонометрические многочлены. Если же, кроме того, $\mathrm{M}[A(t)] = 0$, где

$$\mathrm{M}\big[A(t)\big] := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T A(s)ds,$$

то мы пишем, что $A(t) \in \Sigma_0$. Далее, $F(t,\varepsilon)$ — матрица, элементами которой являются функции, почти периодичные по t равномерно относительно $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и непрерывные по ε в интервале $[0, \varepsilon_0]$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Основываясь на работах Н.Н. Боголюбова, И.З. Штокало построил замену, переводящую систему (20) в систему, которая в главной части не содержит осциллирующих коэффициентов. Именно, имеет место

Теорема 4. *Система* (20) *при достаточно малых* ε *с помощью замены*

$$x = \Big(I + \sum_{l=1}^{k} \varepsilon^l Y_l(t)\Big)y, \tag{21}$$

где $Y_l(t) \in \Sigma_0$, $(l = 1, \ldots, k)$, *приводится к виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{l=1}^{k} \varepsilon^l A_l + \varepsilon^{k+1} G(t,\varepsilon)\Big)y, \tag{22}$$

с постоянными матрицами A_l *и матрицей* $G(t,\varepsilon)$, *обладающей теми же свойствами, что и матрица* $F(t,\varepsilon)$.

Как уже было сказано, Штокало интересовался вопросом об устойчивости решений системы (20), и в этом смысле система (22) проще исходной системы. Как оказывается, об устойчивости решений системы (20) можно судить, анализируя знаки первых ненулевых коэффициентов у разложений в ряд по степеням ε детерминантов Гурвица матрицы

$$A(\varepsilon) = A_0 + \sum_{l=1}^{k} \varepsilon^l A_l.$$

В разделе 2.2 формулируется и доказывается основной результат этой главы — теорема об усреднении линейных систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами, которые могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big)x, \qquad x\in\mathbb{C}^m. \quad (23)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы размера $m\times m$, $v_1(t),\ldots,$ $v_n(t)$ – скалярные функции, а также

(1) A_0 — постоянная матрица с вещественными собственными значениями;

(2) $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

(3) $\dot v_1(t),\dot v_2(t),\ldots,\dot v_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$;

(4) Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$;

(5) Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ;

(6) Матрица $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Теорема 5. *Система* (23) *при достаточно больших* t *заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (24)$$

где I *— единичная матрица, а матрицы* $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ *принадлежат классу* Σ_0, *приводится к виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_iv_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y, \quad (25)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ *и матрицей* $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Для определения матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ получаем линейные неоднородные дифференциальные уравнения, которые имеют следующий вид:

$$\dot{Y}_{i_1 i_2\ldots i_l} + Y_{i_1 i_2\ldots i_l} A_0 - A_0 Y_{i_1 i_2\ldots i_l} = F^{(i_1\ldots i_l)}(t) - A_{i_1\ldots i_l},$$

где $F^{(i_1\ldots i_l)}(t) \in \Sigma$. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}$ определяются из условия равенства нулю среднего значения выражения, находящегося в правой части этого уравнения.

Матрицы A_i и A_{ij} называют соответственно матрицами первого и второго приближений. Они определяются следующим образом:

$$A_i = \mathrm{M}\bigl[A_i(t)\bigr], \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Далее,

$$A_{ij} = \mathrm{M}\bigl[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)\bigr], \qquad 1 \le i < j \le n$$

и

$$A_{ii} = \mathrm{M}\bigl[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)\bigr], \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Матрицы $Y_i(t)$, в свою очередь, определяются как решения матричных уравнений

$$\frac{dY_i}{dt} + Y_i A_0 - A_0 Y_i = A_i(t) - A_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

с нулевым средним значением.

В разделе 2.3 обосновывается законность использования теоремы об усреднении в случае периодичности осциллирующей составляющей, т.е. в том случае, когда матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются периодическими с одним и тем же периодом $T > 0$. В разделе 2.4 формулируются некоторые утверждения вспомогательного плана, которые оказываются полезными при практическом использовании методики усреднения.

В **третьей** главе изучается асимптотическое поведение решений некоторых уравнений из класса адиабатических осцилляторов. Основная задача здесь состоит в том, чтобы показать, что схожие по виду уравнения («стремящиеся» при $t \to +\infty$ к гармоническому осциллятору) демонстрируют совершенно различное асимптотическое поведение решений при $t \to +\infty$. В разделе 3.1 строится асимптотика решений следующего уравнения, которое получается в результате периодического возмущения гармонического осциллятора с исчезающей на бесконечности амплитудой:

$$\ddot{x} + \bigl(1 + \xi(t)P(t)\bigr)x = 0. \tag{26}$$

Здесь действительная функция $\xi(t) \ge 0$ такова, что $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\xi(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, а $\dot{\xi}(t)$ и $\xi^2(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Действительная функция $P(t)$ является T-периодической. В разделе 3.2 изучается следующее уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(1 + a\frac{\sin\varphi(t)}{\sqrt{t}}\right) y = 0, \tag{27}$$

где a – произвольная действительная постоянная и

$$\varphi(t) = t + \alpha t^{\beta}, \qquad \alpha \neq 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

В разделе 3.3 речь идет об одной задаче, возникающей при исследовании четвертого уравнения Пенлеве. Именно, рассматривается уравнение (27), где на сей раз

$$\varphi(t) = t + \alpha \ln t, \qquad a, \alpha \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{28}$$

В частности, показано, что в плоскости параметров (a, α) множество

$$-\frac{5a^2}{24} \leq \alpha \leq \frac{a^2}{24}, \quad a \neq 0$$

является зоной неустойчивости (параметрического резонанса) для уравнения (27) с функцией $\varphi(t)$ вида (28). В разделе 3.4 рассматривается уравнение чуть более общего вида, нежели уравнение (27):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + a\frac{\sin\varphi(t)}{t^{\rho}}\right) x = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \tag{29}$$

где функция $\varphi(t)$ имеет тот же вид, что и в уравнениях из §3.2 и §3.3. В этом разделе приводятся результаты качественного характера относительно поведения решений уравнений вида (29). Как оказывается, в пространстве параметров уравнения (29) существует, вообще говоря, гиперплоскость, которая разделяет пространство параметров на два полупространства, в одном из которых решения уравнения (29) устойчивы, а в другом, соответственно, неустойчивы. В точках гиперплоскости может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость решений.

В **четвертой** главе с помощью методики усреднения строится асимптотика решений одного уравнения второго порядка, а также исследуется поведение решений системы двух осцилляторов с медленно убывающей связью.

В разделе 4.1 изучается одномерное уравнение Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом при нулевой энергии:

$$-y'' + q(x)y = 0, \tag{30}$$

где

$$q(x) = x^{\beta} P(x^{1+\alpha}) + cx^{-2}.$$

Здесь c — произвольная действительная постоянная, а действительные параметры α и β удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\beta - \alpha \geq -1, \quad 2\alpha - \beta > 0. \tag{31}$$

Эта задача исследовались в работе А.Р. Итса[1] в предположении, что осциллирующая составляющая потенциала, функция $P(x)$, является гладкой периодической функцией с нулевым средним значением. Метод исследования, использованный Итсом, довольно сложен и основывается на представлении асимптотической формулы с помощью решений уравнения Хилла, содержащих большой параметр, и на дальнейшем исследовании зависимости этих решений от параметра. Используемый нами метод позволяет более просто построить асимптотику решений этого уравнения и нуждается в менее ограничительных предположениях относительно функции $P(x)$.

В разделе 4.2 исследуется система с двумя степенями свободы, представляющая собой систему двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $\omega > 0, \omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, a и b – произвольные (ненулевые) действительные параметры, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Уже первое и второе приближения позволяют обнаружить довольно богатую асимптотическую картину поведения решений этой системы при $t \to +\infty$.

В **пятой** главе предпринимается попытка построить разностный вариант методики усреднения. В разделе 5.1 приводится разностный аналог теоремы Левинсона. Пусть $f(t) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, тогда мы пишем, что $f(t) \in \ell_1$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty.$$

Если же $R(t)$ — матрица произвольных размеров и $t \in \mathbb{N}$, то, по аналогии с непрерывным случаем, запись $R(t) \in \ell_1$ означает, что $f(t) = \|R(t)\| \in \ell_1$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма. Рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$x(t+1) = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x(t), \tag{33}$$

где $t \in \mathbb{N}$, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ и $\lambda_i^{-1}(t)R(t) \in \ell_1$ для всех $i = 1, \dots, m$. Системы вида (33) по аналогии с непрерывным случаем бу-

[1] *Итс А.Р.* Асимптотическое поведение решений радиального уравнения Шредингера с осциллирующим потенциалом при нулевой энергии // Проблемы математической физики. Сб. статей. Издательство Ленинградского университета. 1979. №9. С. 30 – 41.

дем называть L–диагональными. Имеет место следующий разностный аналог теоремы Левинсона[1].

Теорема 6. *Пусть*

(1)

$$\lambda_i(t) \neq 0, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad t \geq t_0,$$

(2)

$$\lambda_i^{-1}(t) R(t) \in \ell_1, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

(3) выполнены следующие условия (условия дихотомии): найдутся положительные константы $\mu > 0$ и $K > 0$ такие, что для любой пары индексов (i, j), $i \neq j$ имеет место или

$$\prod_{l=t_0}^{t} \left| \frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)} \right| \to +\infty, \quad t \to +\infty \quad \text{и} \quad \prod_{l=t_1}^{t_2} \left| \frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)} \right| \geq \mu > 0, \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2 \tag{34}$$

или

$$\prod_{l=t_1}^{t_2} \left| \frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)} \right| \leq K, \qquad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{35}$$

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$ системы (33) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to +\infty$:*

$$X(t) = \Big[I + o(1) \Big] \prod_{l=t_0}^{t-1} \Lambda(l). \tag{36}$$

Замечание 1. Если $|\lambda_i(t)| \geq \delta > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, то условие *(2)* теоремы 6 заведомо выполнено, если $R(t) \in \ell_1$.

Замечание 2. Отметим следующие условия, достаточные для дихотомии (34)– (35). Пусть $\lambda_i(t) \to \lambda_i \neq 0$ при $t \to +\infty$, $1 \leq i \leq m$ и

а) $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ для $i \neq j$. Тогда, если $|\lambda_i| > |\lambda_j|$, то имеет место (34), в противном случае выполнено (35).

б) $|\lambda_i| = |\lambda_j|$ для некоторой пары индексов (i, j), $i \neq j$. Положим $|\lambda_i(t)/\lambda_j(t)| = 1 + r_{ij}(t)$, где $r_{ij}(t) \to 0$, $t \to +\infty$. Тогда, как несложно показать, если $r_{ij}(t)$ не меняет своего знака при $t \geq t_0$, то условия дихотомии также оказываются выполненными.

Итак, как и в случае с дифференциальными уравнениями, для того, чтобы построить асимптотику системы разностных уравнений, можно попытаться привести ее к L–диагональному виду и затем (если это удается) воспользоваться теоремой 6. В разделе 5.2 излагается соответствующий разностный вариант теоремы об усреднении. Пусть рассматривается следующая линейная

[1] *Benzaid Z., Lutz D.A.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195 – 221.

система разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами:

$$x(t+1)=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R(t)\Big)x(t). \quad (37)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ – квадратные матрицы, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ – скалярные функции, $x(t)\in\mathbb{C}^m$ и $t\in\mathbb{N}$.

Пусть

1. A_0 — постоянная невырожденная матрица с вещественными собственными значениями. Кроме того, мы предположим, что спектры матриц A_0 и $-A_0$ не пересекаются.

2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

3. $\Delta v_1(t),\Delta v_2(t),\ldots,\Delta v_n(t)\in\ell_1$. $\big(\Delta v(t):=v(t+1)-v(t)\big)$.

4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in\ell_1$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$.

5. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ.

6. Матрица $R(t)\in\ell_1$.

Теорема 7. *Система* (37) *при достаточно больших t заменой*

$$x(t)=\Big[I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y(t), \quad (38)$$

где I – единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ_0, приводится к виду

$$y(t+1)=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t)\Big)y(t), \quad t\in\mathbb{N}_0, \quad (39)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in\ell_1$.

Для определения матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ получаем линейные неоднородные разностные уравнения, которые имеют следующий вид:

$$Y_{i_1i_2\ldots i_l}(t+1)A_0-A_0Y_{i_1i_2\ldots i_l}(t)=F^{(i_1\ldots i_l)}(t)-A_{i_1\ldots i_l},$$

где $F^{(i_1 \dots i_l)}(t) \in \Sigma$. Матрицы $A_{i_1 \dots i_l}$ определяются из условия равенства нулю среднего значения выражения, находящегося в правой части этого уравнения. Для матриц $A_{i_1 \dots i_l}$ получаем точно такие же формулы, как и в случае с дифференциальными уравнениями с той лишь разницей, что теперь среднее значение определяется следующим образом:

$$A = \mathrm{M}\big[A(t)\big] := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} A(k), \qquad t \in \mathbb{N}.$$

В разделе 5.3 эта методика демонстрируется на примере построения асимптотики решений одного разностного уравнения второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами:

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\right) x(n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{40}$$

Здесь параметр $0 < \alpha \le 1$, а действительная функция $p(n)$ является или периодической, или представляет собой дискретный тригонометрический многочлен. Кроме того, предполагается, что функция $p(n)$ имеет нулевое среднее значение, т.е. $\mathrm{M}\big[p(n)\big] = 0$. Наконец, в разделе 5.4 изучаются два специальных уравнения из класса дискретных адиабатических осцилляторов:

$$x(n+2) - 2\cos\omega\, x(n+1) + \big(1 + q(n)\big)x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{41}$$

где $0 < \omega < \pi$, а функция $q(n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Сначала рассматривается пример, когда

$$q(n) = a\frac{\sin 2\omega n}{n^\alpha}, \qquad \frac{1}{2} < \alpha \le 1.$$

В качестве второго примера снова рассматривается уравнение (41), но теперь

$$q(n) = a\frac{\sin(2\omega n + \gamma n^\beta)}{n}, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{42}$$

Для построения асимптотики решений последнего уравнения требуется знакомство с некоторой дополнительной информацией, которая приводится в приложении A.

В **заключении** подводятся основные итоги работы, а также намечаются возможные пути продолжения исследования.

В **приложении A** собраны основополагающие факты из теории временны́х шкал (time-scales), необходимые для формулировки варианта метода усреднения применительно к уравнениям, заданным на временны́х шкалах, близких по своему устройству при $t \to +\infty$ к «классическим» случаям $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (обыкновенные дифференциальные уравнения) и $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ (разностные уравнения). *Временно́й шкалою (time-scale)* называют произвольное замкнутое подмножество действительно оси $\mathbb{R}$.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих научных журналах, включенных в перечень ВАКа:

[1] *Нестеров, П.Н.* Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом / П.Н. Нестеров // Математические заметки. - 2006. - Т. 80, №2. - С. 240 – 250.

Другие публикации:

[2] *Нестеров, П.Н.* Асимптотическое поведение решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом / П.Н. Нестеров // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2005. - Вып. 7. - С. 164 – 179.

[3] *Нестеров, П.Н.* Асимптотическое поведение решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом / П.Н. Нестеров; Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль, 2005. - 18 с. - Деп. в ВИНИТИ РАН 29.04.2005, №640-В 2005.

[4] *Нестеров, П.Н.* Асимптотическое поведение решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом / П.Н. Нестеров // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва. - 2005. - С. 96 – 102.

[5] *Бурд, В.Ш.* Об асимптотике решений одного разностного уравнения второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами / В.Ш. Бурд, П.Н. Нестеров // Модел. и анализ информ. систем / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2005. - Т. 12, №2 - С. 24 – 31.

[6] *Нестеров, П.Н.* Усреднение систем с колебательно убывающими коэффициентами в случае периодичности осциллирующей составляющей / П.Н. Нестеров // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль: ЯрГУ, 2006. - Вып. 8. - С. 98 – 108.

[7] *Нестеров, П.Н.* Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью / П.Н. Нестеров; Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. - Ярославль, 2006. - 28 с. - Деп. в ВИНИТИ РАН 21.02.2006, №171-В 2006.

[8] *Нестеров, П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами / П.Н. Нестеров // Тихонов и современная математика: Асимптотические методы: Международная конференция, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 19-25 июня 2006 г.: Тезисы докладов секции №6. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. - С. 73 – 74.

[9] *Нестеров, П.Н.* Параметрический резонанс в одном уравнении из класса адиабатических осцилляторов / П.Н. Нестеров // VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. – Симферополь: ДиАйПи, 2006. - С. 128.