На правах рукописи

Сорокина Мария Евгеньевна

# БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГООБРАЗИЙ МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА ДВА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2006

Работа выполнена на кафедре алгебры Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского

**Научный руководитель** - доктор физико-математических наук, профессор
Тихомиров Александр Сергеевич

**Официальные оппоненты**: доктор физико-математических наук, доцент
Кулешов Сергей Алексеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Краснов Вячеслав Алексеевич

**Ведущая организация** - Владимирский государственный университет

Защита состоится "___"________ 2006 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г.Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова.

Автореферат разослан "___"________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы. Цели работы.** Описание геометрических свойств многообразий модулей стабильных и полустабильных когерентных пучков на алгебраических многообразиях является одним из интенсивно развиваемых направлений современной алгебраической геометрии. Актуальность этого направления обусловлена как задачами внутри самой алгебраической геометрии, так и многочисленными приложениями в дифференциальной геометрии и топологии, глобальном анализе и теоретической физике. Так, многообразия модулей векторных расслоений $E$ ранга 2 с нулевым первым классом Чжэня на гладкой комплексной проективной поверхности $S$, стабильных относительно поляризации $H$, индуцируемой проективным вложением поверхности $S$, в силу соответствия Кобаяши-Хитчина интерпретируются в калибровочной теории как пространства инстантонов, т.е. модулей $SU(2)$-связностей на $E$, антиавтодуальных относительно ходжевой метрики $g_H$ на поверхности $S$, рассматриваемой как гладкое 4-мерное многообразие. Это соответствие имеет нетривиальное продолжение на компактификации алгебро-геометрических многообразий модулей по Гизекеру-Маруяме и соответствующие компактификации по Уленбек пространств инстантонов. Важную роль в этой теории играют бирациональные перестройки многообразий модулей пучков (соответственно, перестройки пространств инстантонов) при бирациональных перестройках поверхностей, в частности, при раздутии поверхности в точке $\widetilde{S} \to S$. Первый результат в этом направлении для пучков ранга 1 с нулевым первым классом Чжэня и вторым классом Чжэня $c_2 = 2$ (первый нетривиальный случай), когда соответствующее пространство модулей есть схема Гильберта $\mathrm{Hilb}^2 S$, получен в статье А.С.Тихомирова [7], в которой дано точное описание бирациональной перестройки $\mathrm{Hilb}^2 S \dashrightarrow \mathrm{Hilb}^2 \widetilde{S}$

как композиции двух раздутий и одного стягивания с гладкими центрами. Случай пучков ранга 2 в алгебраической геометрии до настоящего времени оставался открытым, а параллельные результаты в калибровочной теории были впервые получены в диссертации А.Кинга [3] для ранга 3 и выше для инстантонов со вторым классом Чжэня $c_2 = 1$. А.Кинг рассматривает случай некомпактной поверхности, а именно, $S = \mathbb{C}^2$ и, соответственно, $\widetilde{S}$ есть плоскость $\mathbb{C}^2$ с раздутой точкой, и доказывает гипотезу П.Кронхеймера о том, что при $r > 2$ многообразие модулей $SU(r)$-инстантонов с зарядом $n = 1$ на раздутой плоскости $\mathbb{C}^2$, пополненное по К.Уленбек (теоретико-калибровочной эквивалент многообразия $\overline{M(0,1)}$ для пучков ранга $r > 2$ при $n = 1$), получается из многообразия модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2$ раздутием вдоль подмногообразия идеальных инстантонов с особенностью в центре раздутия.

А.С.Тихомиров в 2002 г. сформулировал гипотезу о том, что в случае, когда $S = \mathbb{P}^2$, для малых значений $n$ второго класса Чжэня и надлежащим образом выбранной поляризации $H$ на плоскости с раздутой точкой $\widetilde{S} = \mathbb{F}_1$ многообразие $\overline{M^H_{\mathbb{F}_1}(0,n)}$ модулей $H$-полустабильных когерентных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = n$ на поверхности $\mathbb{F}_1$ есть многообразие $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,n)}$ модулей полустабильных когерентных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = n$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, раздутое вдоль подмногообразия пучков, не локально свободных в центре раздутия $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ - точке $x_0$. Целью настоящей диссертации является доказательство гипотезы А.С.Тихомирова в случае $c_2 = 2$, а также в случае $c_2 = 3$ для открытого подмножества $M_0$ многообразия $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,3)}$, полученного удалением из $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,3)}$ точек, соответствующих классам изоморфизма пучков $E$, имеющих особенность длины $l_{x_0}(E^{\vee\vee}/E) \geq 2$ в точке $x_0$ или имеющих особенность в $x_0$, но с $l(E^{\vee\vee}/E) = 3$.

**Методы работы и научная новизна.** При исследовании применяется конструкция многообразий модулей полустабильных (по Гизекеру) пучков $E$ ранга 2 на проективной плоскости, в которой многообразие $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(c_1, c_2)}$ реализуется как хороший фактор по действию группы $SL(n)$, $n = c_2$, в смысле геометрической теории инвариантов на подходящем открытом подмножестве $G$ произведения грассмановых многообразий $Gr(n + c_1, 3n) \times Gr(n - c_1 - 2, 3n)$; при этом пучок $E$ задается как когомологический пучок комплекса Кронеккера (см. [4], [5]). В работе также используется техника универсальных семейств над подходящей базой, классы $S$-эквивалентности которых представлены точками многообразия модулей. Существование таких семейств, а также наличие универсального комплекса Кронеккера, когомологическим пучком которого и является универсальное семейство пучков над $G \times \mathbb{P}^2$, позволяет провести необходимые вычисления и построить универсальное семейство пучков на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ с требуемыми классами Чжэня. Важное место в исследовании занимает техника перестроек Маруямы, которая используется для построения универсального семейства на $\mathbb{F}_1$.

Все полученные в работе результаты являются новыми.

**Практическая и теоретическая значимость.** Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении геометрических свойств многообразий модулей полустабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 на алгебраических поверхностях.

**Апробация.** Результаты диссертации докладывались на семинаре по алгебраической геометрии при кафедре алгебры Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского, на научных конференциях "Чтения Ушинского"(Ярославль, 2004 - 2006 гг.), на Международной научной конференции "Колмогоровские чтения - IV"(Ярославль, 2006 г.).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в статьях [11], [12].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. В первой главе имеется 3 параграфа, во второй - 6 параграфов и в третьей - 4 параграфа. Список литературы содержит 20 наименований. Общий объем диссертации - 76 страниц.

## Содержание диссертации

Во **ВВЕДЕНИИ** формулируются задачи, решаемые в диссертации, и дается обзор используемых методов и основных результатов диссертации.

**ГЛАВА 1** содержит необходимые понятия и обозначения, а также сведения о многообразиях модулей, используемые в диссертации. В параграфе 1 дается обзор результатов о поведении многообразий модулей полустабильных пучков на алгебраической поверхности при ее бирациональной перестройке, полученных в работах А.С.Тихомирова [7], А.Кинга [3]. В параграфе 2 приводится конструкция многообразия модулей с точки зрения геометрической теории инвариантов ([1], [4], [5], [6]); данная конструкция служит основой построений настоящей работы. Также параграф 2 содержит геометрическое описание многообразия модулей $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,2)}$ полустабильных пучков ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на $\mathbb{P}^2$ (см. [8], [9]). Параграф 3 посвящен описанию метода Эллингсруда-Геттше [2] исследования перестроек многообразий модулей полустабильных пучков ранга 2 при изменении поляризации, а также приведены сведения о поведении многообразий модулей при изменении поляризации на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ в рассматриваемых в настоящей диссертации случаях $c_2 = 2$ и $c_2 = 3$.

**ГЛАВА 2** посвящена доказательству гипотезы А.С.Тихомирова в случае $c_2 = 2$. В параграфе 1 вводятся необходимые обозначения. В параграфе 2 проводится исследование строения проекции $p : G \to M$, где $G$ - открытое подмножество грассманиана $Gr(2,6)$ и $M = G//SL(2)$. Пусть $[E] \in M$ - чисто полустабильная точка. Тогда ее класс $S$-эквивалентности есть $[\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$, где $\mathcal{I}_{x_i}$ - пучок идеалов точки $x_i$ на $\mathbb{P}^2$. В работе показано, что в случае $x_1 \neq x_2$ слой данной проекции над точкой $[\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$ состоит из двух компонент, точки которых соответствуют расширениям вида $0 \to \mathcal{I}_{x_1} \to E \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0$ и $0 \to \mathcal{I}_{x_2} \to E \to \mathcal{I}_{x_1} \to 0$ соответственно. При $x_1 = x_2$ компоненты совпадают и слой над точкой $[E]$ представляет собой конус, вершина которого является замкнутой орбитой группы $SL(2)$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{P}^2$ - центр раздутия $\sigma : S \to \mathbb{P}^2$ и обозначим через $Y_0$ и $Y_1$ подмногообразия коразмерности 3 в $G$, получаемые как объединение по всем $x_1 \in \mathbb{P}^2$ первых и, соответственно, вторых компонент слоев над точками $[\mathcal{I}_{x_0} \oplus \mathcal{I}_{x_1}]$. Пусть $\mathbb{P}^2_{x_0}$ - приведенная подсхема в $M$, точки которой соответствуют классам $S$-эквивалентности пучков, имеющих особенность в точке $x_0$, изоморфная $\mathbb{P}^2$. Тогда $p^{-1}(\mathbb{P}^2_{x_0}) = Y_0 \cup Y_1$. Выполняя два последовательных раздутия $\sigma_0 : G' \to G$ с центром в $Y_0$, а затем $\sigma_1 : \mathbb{G} \to G'$ вдоль ${\sigma_0}^{-1}(Y_1)$, получим многообразие $\mathbb{G}$, которое, как далее показано, служит базой универсального семейства полустабильных пучков на $S$. При этом, обозначив ${\sigma_0}^{-1}(Y_0) =: \widetilde{Y}_0$, $D_0 := \sigma_1^{-1}(\widetilde{Y}_0)$ и $D_1 := (\sigma_1\sigma_0)^{-1}(Y_1)$, в силу универсальности раздутий [10, предл. 7.14] будем иметь проекцию $\widetilde{p} : \mathbb{G} \to \widetilde{M}$, такую, что $\widetilde{p}^* D = D_0 + D_1$ в $\operatorname{Pic} \mathbb{G}$, где $D$ - исключительный дивизор раздутия $\delta$ многообразия $M$ вдоль $\mathbb{P}^2_{x_0}$.

В параграфе 3 доказывается следующий факт.

**Теорема 2.3.1.** *Многообразие $\mathbb{G}$ неособо.*

Кроме того, показано, что центр второго раздутия на неособом многообразии, дающего многообразие $\mathbb{G}$, имеет особенности, что изложено в **Замечании 2.3.2**.

В параграфе 4 выполняется построение универсального семейства $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ на многообразии $\mathbb{G} \times S$. Для этого осуществляется некоторая последовательность раздутий многоообразия $G \times \mathbb{P}^2$, а затем на полученном многообразии производится перестройка Маруямы прообраза пучка $\mathbb{E}$, являющегося универсальным семейством на $G \times \mathbb{P}^2$. Семейство $\mathbb{E}$ задается тройкой (см. [5]) $0 \to \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to H \otimes \mathcal{O}_G \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathbb{E} \to 0$, в которой $\mathcal{K}$ - тавтологическое расслоение на $G$.

Рассмотрим цепь морфизмов $\mathbb{G} \times S \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{G}} \times \sigma} \mathbb{G} \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sigma_1\sigma_0 \times \mathrm{id}_{\mathbb{P}^2}} G \times \mathbb{P}^2$, и пусть $\mathbb{E}'$ - обратный образ на $\mathbb{G} \times S$ пучка $\mathbb{E}$ при композиции данных отображений. Пусть $l_0$ - исключительный дивизор раздутия $\sigma : S \to \mathbb{P}^2$. Ранг пучка $\mathbb{E}'$ подскакивает на $D_0 \times l_0$, и для любой точки $y$ из $D_0^* = D_0 \setminus D_0 \cap D_1$ имеет место равенство $\mathcal{T}ors(\mathbb{E}'|_{\{y\} \times S}) \simeq \mathcal{O}_{l_0}(-1)$.

Так как $\mathrm{codim}_{\mathbb{G} \times S}(D_0 \times l_0) = 2$, то для выполнения перестройки Маруямы необходимо выполнить еще одно раздутие $\rho$: $X \to \mathbb{G} \times S$ вдоль $D_0 \times l_0$. Обозначим $\mathbf{D} := \rho^{-1}(D_0 \times l_0)$. При этом слои проекции $X \to \mathbb{G}$ над точками многообразия $\mathbb{G}$, не лежащими в $D_0$, изоморфны $S$, а ввиду гладкости $D_0^*$ слои над точками $y \in D_0^*$ есть объединение поверхности $S_y \simeq S$ и $F_y$, изоморфной поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$, причем $S_y$ и $F_y$ пересекаются по прямой $l_{0y}$, которая является исключительной прямой на $S_y$, но не является таковой на $F_y$. Обозначим $\widetilde{\mathbf{E}} := \rho^*\mathbb{E}'$.

Следующие предложения описывают свойства пучка $\widetilde{\mathbf{E}}$.

**Предложение 2.4.2.** *1) Пучок $\widetilde{\mathbf{E}}$ имеет кручение вдоль дивизора $\mathbf{D}$.*

*2) Для произвольной точки $y \in D_0^*$ при отождествлении $S_y$ с $S$ имеем $\mathcal{T}ors(\widetilde{\mathbf{E}}|_{S_y}) \simeq \mathcal{O}_{l_0}(-1)$.*

Пусть $\boldsymbol{\sigma} : X \to \mathbb{G} \times S$ - композиция морфизмов.

**Предложение 2.4.3.** *Для* $y \in D_0^*$ *пучок* $\widetilde{\mathbf{E}}/\mathcal{T}ors\widetilde{\mathbf{E}}$ *локально свободен в точках слоя* $(pr_1 \circ \boldsymbol{\sigma})^{-1}(y) = F_y \cup S_y$ *и* $(\mathcal{T}ors\widetilde{\mathbf{E}})|_{F_y} \simeq \mathcal{O}_{F_y}(-\tau)$.

Здесь $\tau = c_1(\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, а $h = c_1(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ при стандартной проекции $\pi: S \to \mathbb{P}^1$.

**Предложение 2.4.4.** *Пучок* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *имеет подпучок вида* $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \sigma_{\mathbf{D}}^*\mathcal{A}$, *где* $\mathcal{A}$ *- некоторый обратимый пучок на* $D_0 \times \{x_0\} \simeq D_0$.

Определим пучок $\mathbf{E}$ как коядро вложения $0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \sigma_{\mathbf{D}}^*\mathcal{A} \to \widetilde{\mathbf{E}}$. Для этого пучка верны

**Предложение 2.4.5.** *Для* $y \in D_0^*$ *пучок* $\mathbf{E}$ *локально свободен в точках слоя* $(pr_1 \circ \boldsymbol{\sigma})^{-1}(y) = F_y \cup S_y$.

**Предложение 2.4.6.** *Пучок* $\mathbf{E}$ *имеет локально свободную резольвенту длины 1.*

Обозначим $W$ собственный прообраз подмногообразия $\mathbb{G} \times l_0 \subset \mathbb{G} \times S$ при раздутии $\rho$. Это дивизор в $X$. Пусть $\sigma_{\mathbf{D}} := \sigma|_{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{D}} := \mathbf{E}|_{\mathbf{D}}$. Пользуясь локально свободной резольвентой пучка $\mathbf{E}$, получаем, что естественный морфизм $\sigma_{\mathbf{D}}^*\sigma_{\mathbf{D}*}\mathbf{E}_{\mathbf{D}}(-W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}}(W) \xrightarrow{ev} \mathbf{E}_{\mathbf{D}}$ - это вложение и $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$-пучок $\sigma_{\mathbf{D}}^*\sigma_{\mathbf{D}*}\mathbf{E}_{\mathbf{D}}(-W)$ локально свободен. Обозначим через $\mathcal{L}$ коядро данного морфизма. Имеется сюръекция $\mathbf{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ - ядро сюръекции $\mathbf{E}(\mathbf{D}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{D})$.

Следующие утверждения показывают, что пучок $\rho_*\boldsymbol{\mathcal{E}}$ есть искомое универсальное семейство полустабильных пучков на $\mathbb{G} \times S$.

**Предложение 2.4.9.** *Естественный морфизм пучков* $\rho^*\rho_*\boldsymbol{\mathcal{E}} \xrightarrow{ev} \boldsymbol{\mathcal{E}}$ *является изоморфизмом.*

Далее рассматриваем только те точки $y \in D_0$, которые соответствуют пучкам, не являющимся прямой суммой двух пучков идеалов точек на $\mathbb{P}^2$.

**Предложение 2.4.12.** *Пусть* $y \in D_0$ *- точка с указанным* *выше свойством. Тогда* $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S_y}$ *- полустабильный пучок без кручения с* $c_1 = 0,\ c_2 = 2$.

В параграфе 5 изучаются точки многообразия $\widetilde{M}$ и доказывается, что если $y$ - произвольная точка в $\widetilde{M}$, $\widetilde{p}:\ \mathbb{G} \to \widetilde{M}$ - проекция, то для точки $x \in \widetilde{p}^{-1}(y)$ с указанным свойством класс изоморфизма $[\boldsymbol{\mathcal{E}}|_{x\times S}]$ зависит только от $y$. Пусть $x, x' \in \mathbb{G}$. Обозначим $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x) := \boldsymbol{\mathcal{E}}|_{S_x \cup F_x}$. Тогда имеет место следующий факт.

**Предложение 2.5.1.** *Во введенных выше обозначениях* $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x) \simeq \boldsymbol{\mathcal{E}}(x')$ *тогда и только тогда, когда* $\widetilde{p}(x) = \widetilde{p}(x')$ *в* $\widetilde{M}$.

Проверке свойства универсальности построенного многообразия $\widetilde{M}$ посвящен параграф 6. Это завершает доказательство основного результата главы 2 - следующей теоремы.

**Теорема 2.1.1.** $\overline{M_S(0,2)}$ *есть раздутие многообразия* $M$ *с центром в* $\mathbb{P}^2_{x_0}$.

В **ГЛАВЕ 3** рассматривается случай $c_2 = 3$. Параграф 1 содержит необходимые сведения и обозначения. Пусть $M(0,3)$ - многообразие модулей стабильных пучков на $\mathbb{P}^2$ ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$. По конструкции $M(0,3) = \mathcal{G}_0//SL(3)$, где $\mathcal{G}_0$ - открытое подмножество произведения грассмановых многообразий $Gr(3,9) \times Gr(1,9)$. В $M(0,3)$ рассмотрим открытое подмножества $M_0$, полученное удалением из $M(0,3)$ точек, соответствующих классам изоморфизма пучков $E$, имеющих особенность длины $l_{x_0}(E^{\vee\vee}/E) \geq 2$ в точке $x_0$ или имеющих особенность в $x_0$, но с $l(E^{\vee\vee}/E) = 3$. Прообраз многообразия $M_0$ в $\mathcal{G}_0$ обозначим $W$; таким образом, $M_0 = W//SL(H)$. На $W \times \mathbb{P}^2$ имеется универсальная монада, полученная ограничением на $W \times \mathbb{P}^2$ универсальной монады на $\mathcal{G}_0 \times \mathbb{P}^2$. Когомологический пучок пучок $\mathbb{F}$ монады на $W \times \mathbb{P}^2$ есть универсальное семейство пучков, классы изоморфизма которых представлены точками многообразия $M_0$. Рассмотрим в $M_0$ подсхему $\Sigma = \Big\{[E] \in M_0 \ \Big|\ 0 \to \mathcal{I}_{x_0 \cup x_1} \to E \to \mathcal{I}_{x_2} \to$

$0,\ x_1 \neq x_0,\ x_2 \neq x_0\big\}$, где $x_0$ - центр раздутия $\sigma:\ S \to \mathbb{P}^2$. Схема $\Sigma$ изоморфна расслоению со слоем $\mathbb{P}^1$ над произведением $(\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\}) \times (\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\})$, неособа и имеет коразмерность 4 в $M_0$. Рассмотрим раздутие $\theta:\ \widetilde{M_0} \to M_0$ многообразия $M_0$ вдоль $\Sigma$, и пусть $\boldsymbol{\Sigma}$ - исключительный дивизор. Обозначим через $Y$ прообраз $\Sigma$ в $W$. Пусть $f:\mathbf{W} \to W$ - раздутие многообразия $W$ в подсхеме $Y$, $D = f^{-1}(Y)$ - исключительный дивизор раздутия $f$.

В параграфе 2 выполняется построение универсального семейства на $\mathbf{W} \times S$ в следующей последовательности. Рассмотрим последовательность морфизмов $\varphi:\ \mathbf{W} \times S \xrightarrow{\varphi} \mathbf{W} \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\psi} W \times \mathbb{P}^2$, и пусть $\mathbb{F}' := \varphi^*\psi^*\mathbb{F}$. Ранг $\mathbb{F}'$ подскакивает на $D \times l_0$ и имеет место изоморфизм $\mathcal{T}ors(\mathbb{F}'|_{y\times S}) \simeq \mathcal{O}_{l_0}(-1)$ для произвольной точки $y \in D$, однако множество особенностей пучка $\mathbb{F}'$ имеет коразмерность 2 в $\mathbf{W} \times S$, поэтому производим еще одно раздутие $w:\ \mathbb{S} \to \mathbf{W} \times S$ с центром в $D \times l_0$, $\mathbb{D} = w^{-1}(D \times l_0)$ - исключительный дивизор. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{F}} := w^*\mathbb{F}'$, $\boldsymbol{\delta} := \varphi \circ w$, $\delta_{\mathbb{D}} := \boldsymbol{\delta}|_{\mathbb{D}}$. Имеет место следующее утверждение.

**Предложение 3.2.1.** *Пучок $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ имеет кручение вдоль дивизора $\mathbb{D}$; при этом $\mathcal{T}ors\widetilde{\boldsymbol{F}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{D}}(\mathbb{D}) \otimes \delta_{\mathbb{D}}^*\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ - обратимый пучок на $D \times \{x_0\} \simeq D$.*

Пучок $\boldsymbol{F}$ определяется точной тройкой $0 \to \mathcal{T}ors\widetilde{\boldsymbol{F}} \to \widetilde{\boldsymbol{F}} \to \boldsymbol{F} \to 0$. Следующее утверждение применяется для дальнейших вычислений.

**Предложение 3.2.2.** *Пучок $\boldsymbol{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины 1.*

Ограничивая $\boldsymbol{F}$ на дивизор $\mathbb{D}$ и применяя к пучку $\boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}$, тензорно умноженному на $\mathcal{O}_{\mathbb{S}}(-U)$, где $U = w_{prop}^{-1}(\mathbf{W} \times l_0) \simeq \mathbf{W} \times l_0$ - дивизор на $\mathbb{S}$, морфизм вычисление $ev:\ \delta_{\mathbb{D}}^*\delta_{\mathbb{D}*}\boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}(-U) \to \boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}(-U)$, мы получаем обратимый пучок $\delta_{\mathbb{D}}^*\delta_{\mathbb{D}*}\boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}(-U)$ на $\mathbb{D}$. Обозначим через $\mathcal{N}$ коядро инъективного морфизма $ev(U):\ \delta_{\mathbb{D}}^*\delta_{\mathbb{D}*}\boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}(-U) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}}(U) \to \boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}$. Пусть $\mathcal{J} = \delta_{\mathbb{D}}^*\delta_{\mathbb{D}*}\boldsymbol{F}_{\mathbb{D}}(-U) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}}(U)$.

Тогда точна тройка $0 \to \mathcal{J} \to \boldsymbol{F}_{\mathbb{D}} \to \mathcal{N} \to 0$. Пучок $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ - результат перестройки Маруямы - определим с помощью точной последовательности $0 \to \boldsymbol{\mathcal{F}}(-\mathbb{D}) \to \boldsymbol{F} \to \mathcal{N} \to 0$. Пучок $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ поднят с $\mathbf{W} \times S$, как показывает следующее утверждение.

**Предложение 3.2.4.** $\boldsymbol{\mathcal{F}} \simeq w^* w_* \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Пучки семейства $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, ограниченного на $\mathbb{D}$, обладают следующим свойством: при ограничении на исключительную прямую $l_0 \subset S$ такие пучки имеют единственное прямое слагаемое $\mathcal{O}_{l_0}(-1)$ (см. **Замечание 3.2.5**).

В параграфе 3 проводится проверка стабильности пучков построенного семейства $w_*\boldsymbol{\mathcal{F}}$ относительно поляризации $H = 2\tau + h$. Результат проверки - следующее

**Предложение 3.3.2.** *Для любой точки $y \in D$ пучок $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{S_y}$ стабилен относительно поляризации $H = 2\tau + h$.*
(Здесь $S_y$ - одна из компонент слоя проекции $\mathbb{S} \to \mathbf{W}$ над точкой $y \in D$.)

Однако, как указано в **Замечаниях 3.3.1 и 3.3.3**, семейство $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ не содержит пучков, стабильность которых зависит от выбора поляризации на $S$, а значит, предложение 3.3.2 верно для любой поляризации.

В параграфе 4 доказывается свойство универсальности многообразия $\widetilde{M}_0$, которое понимается в том смысле, что для определенного типа семейств $\mathcal{U}$ с базой $B$ пучков на $S$ определен морфизм $B \to \widetilde{M}_0$. А именно, семейство $\mathcal{U}$ выбирается содержащим стабильные пучки $E$ на $S$ без кручения ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ только следующих видов: (i) $E|_{l_0} = 2\mathcal{O}_{l_0}$; (ii) $E|_{l_0} = \mathcal{O}_{l_0}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_0}(1)$ и $E$ - пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой; (iii) $E|_{l_0} = \mathcal{O}_{l_0}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_0} \oplus k_z$ и $E$ - пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой и простейшей особенностью на исключительной прямой. Как следствие универсальности многообразия $\widetilde{M_0}$ получаем, что для различных точек $x$ и $x'$ в $\widetilde{M_0}$ классы изоморфизма $[\boldsymbol{\mathcal{F}}|_{x\times S}]$ и $[\boldsymbol{\mathcal{F}}|_{x'\times S}]$ различны (см. **Замечание 3.4.1**).

Таким образом, доказана следующая теорема - основной результат главы 3.

**Теорема 3.4.2.** *Пусть $M_0$ - открытое подмножество многообразия $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,3)}$ модулей стабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, полученное удалением из $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,3)}$ точек, соответствующих классам изоморфизма пучков $E$, имеющих особенность длины $l_{x_0}(E^{\vee\vee}/E) \geq 2$ в точке $x_0$ или имеющих особенность в $x_0$ и удовлетворяющих условию $l(E^{\vee\vee}/E) = 3$, и $\sigma : S \to \mathbb{P}^2$ - раздутие проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в точке $x_0$. Рассмотрим в $M_0$ подсхему $\Sigma = \big\{[E] \in M_0 \;\big|\; 0 \to \mathcal{I}_{x_0\cup x_1} \to E \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0,\ x_1 \neq x_0,\ x_2 \neq x_0\big\}$, изоморфную расслоению со слоем $\mathbb{P}^1$ над произведением $(\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\}) \times (\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\})$. Пусть $\theta : \widetilde{M_0} \to M_0$ - раздутие многообразия $M_0$ вдоль $\Sigma$. Тогда многообразие $\widetilde{M_0}$ - открытое подмножество многообразия $\overline{M_S(0,3)}$ модулей стабильных (относительно любой поляризации) пучков ранга 2 на $S$ с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, точки которого соответствуют классам изоморфизма $[E]$ пучков, таких что либо $E|_{l_0} = 2\mathcal{O}_{l_0}$, либо $E|_{l_0} = \mathcal{O}_{l_0}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_0}(1)$ и $E$ - пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой, либо $E|_{l_0} = \mathcal{O}_{l_0}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_0} \oplus k_z$ и $E$ - пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой и простейшей особенностью на исключительной прямой.*

## Список литературы


1. **Barth W.** *Moduli of vector bundles on the projective plane* // Invent. Math. **42** (1977). P. 63-91.

2. **Ellingsrud G., Göttsche L.** *Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization* // J. Reine Angew. Math. **467** (1995). P. 1-49.

3. **King A.** *Instantons and holomorphic bundles on the blown-up plane.* D. Phil. Thesis, Oxford, 1989, 68 p.

4. **Le Potier J.** *Fibres stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ // Math. Ann. **241** (1979). P. 217-256.

5. **Le Potier J.** *A propos de la construction de l′espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif,* // Bull. Soc. math. France, **122** (1994). P. 363-369.

6. **Le Potier J.** *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}^2$ // Ann. scient. de l'É.N.S. $4^e$ série, **18**, No.2 (1985). P. 193-243.

7. **Tikhomirov A.S.** *On birational transformations of Hilbert schemes of an algebraic surface* // Matem. Zametki, **73**, No.2 (2003). P. 281-294 (Russian). English translation: Mathem. Notes, **73**, No.2 (2003). P. 259-270.

8. **Trautmann G.** *Moduli spaces in algebraic geometry.* On-line lecture notes, Univ. Kaiserslautern, 2000, 92 p.
`http://www.mathematik.uni-kl.de/~trm/teaching/de/ModuliSpWS05.html`

9. **Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.** *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.* М.: Мир, 1984, 308 с.

10. **Хартсхорн Р.** *Алгебраическая геометрия.* М.: Мир, 1981, 597 с.

## Публикации по теме диссертации

11. **Сорокина М.Е.** *Бирациональные свойства многообразия модулей полустабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на проективной плоскости* // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей к 20-летию математического факультета, Ярославль: ЯрГУ, 2006. С. 403-420.

12. **Сорокина М.Е.** *Бирациональные свойства многообразия модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности $\mathbb{F}_1$* // Ярославский педагогический вестник, Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006, №4 (49). С. 65-72.