На правах рукописи

Добрынина Ирина Васильевна

РЕШЕНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ В ГРУППАХ КОКСТЕРА

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ярославль — 2010

Работа выполнена в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого и Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова

Научные консультанты:

доктор физико-математических наук, профессор
Безверхний Владимир Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Дурнев Валерий Георгиевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Глухов Михаил Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор
Молдаванский Давид Ионович,
доктор физико-математических наук, профессор
Фомин Александр Александрович

Ведущая организация:

Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 16 марта 2010 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова по адресу: 150008, Ярославль, ул. Союзная, 144, ауд. 426

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Автореферат разослан 12 февраля 2010 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С. И.

Введение

Актуальность темы

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дэном[1] в одной из его работ в 1912 г., являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из самого активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг, посвященных данной теме, достаточно назвать монографии В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера[2], а также Р. Линдона и П. Шуппа[3]. Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дэна, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова[4], доказавшего неразрешимость проблем равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном[5] определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β, представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством β. Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая и основные проблемы комбина-

[1]Dehn M. Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Annal. — 1912. — V. 71. — P. 116-144.

[2]Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[3]Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[4]Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Труды МИАН СССР. — 1955. — Т. 44. — С. 3-143.

[5]Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп // Труды Московского математического общества. — 1957. — Т. 6. — С. 231-298.

торной теории групп.

Обобщением проблемы сопряженности слов являются проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов.

Впервые проблема сопряженности подгрупп рассматривалась В. Н. Ремесленниковым[6], доказавшим ее положительное решение в классе конечно порожденных нильпотентных групп.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$. Существование такого алгоритма для некоторого класса конечно определенных групп позволяет для любого автоморфизма $\varphi \in Aut\, G$ определить, является ли он внутренним. С описанием множества решений данной системы связана проблема построения централизатора конечно порожденной подгруппы. Проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов для различных групп рассматривались в работах М. Д. Гриндлингера[7], Д. И. Молдаванского[8], В. Н. Безверхнего[9] и других.

Центральными темами комбинаторной теории групп являются установление для различных подгрупп данных групп — свободны ли они, а также изучение выполнимости тождеств.

Группа G, заданная системой образующих a_i, $i \in J$, и системой определяющих соотношений $(a_ia_j)^{m_{ij}} = 1$, $i, j \in J$, m_{ij} — элемент симметрической матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, соответствующей данной группе, то есть матрицы, в которой $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = m_{ji} \geqslant 2 \cup \{\infty\}$ для $i \neq j$, называется группой Кокстера (в последнем случае между a_i, a_j соотношений нет). Из этого определения получаем $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$. В дальнейшем будем полагать

[6]Ремесленников В. Н. Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и логика. — 1967. — Т. 6, №2. — С. 61-76.

[7]Гриндлингер М. Д. Сопряженность подгрупп свободной группы // Сибирский математический журнал. — 1970. — Т. 11. — С. 1178-1180.

[8]Молдаванский Д. И. Сопряженность подгрупп свободного произведения групп // Уч. записки Ивановского государственного пед. института. — 1972. — С. 123-135.

[9]Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряжённости слов в $C(p)\&T(q)$-группах // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 1998. — Т. 4, №3. — С. 5-13.

$|J| < \infty$.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером[10] в 1934 году. Понятие данной группы возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей. Всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер в 1934 году перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера. В следующей работе[11] он доказал, что всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В чисто алгебраическом аспекте данные группы стали изучаться с 1962 года, начиная с работ Ж. Титса[12]. Обстоятельное изучение групп Кокстера имеется у Н. Бурбаки [13].

Так как каждую группу отражений G можно реализовать дискретной подгруппой ортогональной группы $O(m, n)$ при некоторых m, n, зависящих от G, то всякая группа отражений[14] финитно аппроксимируема и содержит подгруппу конечного индекса, не имеющую кручения. Следовательно, проблема равенства слов в группах Кокстера разрешима.

П. Шуппом[15] приведен пример группы Кокстера с неразрешимой проблемой вхождения, что доказывает неразрешимость этой проблемы в данном классе групп.

К. Аппелем и П. Шуппом[16] определены классы групп Кокстера большого и экстрабольшого типа. Если $m_{ij} \geqslant 3$ для всех $i \neq j$, то G называется группой Кокстера большого типа. В случае $m_{ij} > 3$ имеем группу Кокстера

[10]Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. — 1934. — V. 35.— P. 588-621.

[11]Coxeter H. S. M. The complete enumeration of finite groups of the form // J. Lond. Math. Soc. — 1935. — V. 10. — P. 21-25.

[12]Tits J. Groupes simples et geometries associees // Proc. Int. Congress Math. Stocholm. — 1962. — P. 197-221.

[13]Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.

[14]Громов М. Л. Гиперболические группы. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[15]Schupp P. Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability. // arXiv math. GR/0203020. — 2002. — V. 1. — P. 1-21.

[16]Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. — 1983. — V. 72. — P. 201-220.

экстрабольшого типа. К настоящему моменту известно, что в группах Кокстера экстрабольшого типа К. Аппелем и П. Шуппом решена проблема сопряженности слов. Из работы И. Г. Лысенка[17] следует разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов, а также проблем вхождения в циклическую подгруппу и извлечения корня в группах Кокстера экстрабольшого типа.

И. Каповичем и П. Шуппом[18] для групп Кокстера экстрабольшого типа, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, с $m_{ij} \geq 3k+1$, доказано, что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной в G, а для групп Кокстера экстрабольшого типа, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, с $m_{ij} \geq 3k+7$, m_{ij} — четное, доказано, что всякая k-порожденная подгруппа, не содержащая элементов, сопряженных образующим, является отделимой в G.

В 1972 г. Э. Брискорн и К. Сайто[19] рассмотрели класс групп, названный ими группами Артина. Группа Артина — это группа, заданная копредставлением с системой образующих $a_i, i \in J$, и соотношениями $a_i a_j a_i \ldots = a_j a_i a_j \ldots$, $i, j \in J$, где слова, стоящие слева и справа данного равенства, состоят каждое из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j, при этом m_{ij} — элемент матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, соответствующей данной группе. Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина соотношения $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$, получим копредставление группы Кокстера G. Таким образом, группа Кокстера естественно представляется как некоторая фактор-группа группы Артина.

Брискорн и Сайто доказали разрешимость проблем равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа, то есть в тех группах Артина, для которых соответствующие группы Кокстера конечны. Одновременно и независимо аналогичные результаты получил Делинь[20]. В. Н. Без-

[17]Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Известия АН СССР. Сер. математическая. — 1989. — Т. 53, №4. — С. 814-832.

[18]Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // London Math. Soc. — 2004. — V. 88. — P. 89-113.

[19]Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика: Сб. переводов. — 1974. — № 6. — С. 56-79.

[20]Delinge P. Les immeubles des groupes de tresses generalisses // Invent. math. — 1972. — V. 17, N 4. — P. 273-302.

верхним[21] доказано, что в неприводимых группах Артина конечного типа $B_n,\ n \geq 4,\ D_l,\ l \geq 4,\ E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ H_4$ проблема вхождения неразрешима, а в группах $A_2,\ B_2,\ ,G_2,\ J_2(p)$, где $p = 5$ или $p \geq 7$, — разрешима.

В. Гринблат[22] доказал алгебраическую вычислимость нормализатора элемента в группах Артина конечного типа. Ю. Трубицын[23] получил алгоритм построения образующих нормализатора конечного множества элементов в группах Артина конечного типа.

Группы Артина конечного типа являются обобщением групп кос, введенных в 1925 году Э. Артином[24]. В настоящее время библиография работ по косам содержит сотни наименований[25]. В основополагающих работах Артина косы определяются чисто геометрически и выступают как естественные и наглядные объекты трехмерной топологии, сходные с узлами и зацеплениями. Полученное впервые Артином копредставление группы кос $B_{n+1} =< \sigma_1, \ldots, \sigma_n; \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, i = \overline{1, n-1};\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, i, j = \overline{1, n}, |i - j| > 1 >$ позволило сводить геометрические задачи к алгоритмическим проблемам теории групп. В частности, проблема эквивалентности геометрических кос равносильна проблеме равенства слов в группе кос Артина, а проблема эквивалентности замыканий геометрических кос — проблеме сопряженности в B_{n+1}[26].

Проблема равенства слов в группе кос B_{n+1} решена Э. Артином[27]. Проблема сопряженности в B_{n+1} решена Г. С. Маканиным[28] и Ф. Гарсайдом[29], что явилось важным событием после работ Артина.

---

[21]Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сибирский математический журнал. — 1985. — Т. 23, №5. — С. 27-42.

[22]Гринблат В. А. О нормализаторах групп Артина // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1981. — С. 82-94.

[23]Трубицын Ю. Э. О нормализаторах конечных множеств в группах Артина конечного типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1986. — С. 62-65.

[24]Artin E. Theorie der Zopfe // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg. — 1925.—V. 4. — P. 47-72.

[25]Лин В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства // Алгебра, топология, геометрия. — 1979. — Т. 17. — С. 159-227.

[26]Клейн Ф. Высшая геометрия. — М.-Л.: ГОНТИ, 1939.

[27]Artin E. Theory of braids // Ann. Math. — 1947. — V. 48. — P. 101-126.

[28]Маканин Г. С. Проблема сопряженности в группе кос // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 182, № 3. — С. 495-496.

[29]Гарсайд Ф. Группа кос и другие группы // Математика: Сб. переводов. — 1970. — №4. — С. 113-132.

В 1971 г. Г. С. Маканин [30] доказал, что нормализатор любого элемента группы кос B_{n+1} конечно порожден и указал алгоритм построения образующих этого нормализатора. Г. Г. Гурзо[31] получила алгоритм для нахождения образующих централизатора конечного множества элементов группы кос B_{n+1}. Т. А. Маканина[32] решила проблему обобщенной сопряженности слов в B_{n+1}.

Ядро естественного гомоморфизма группы кос B_{n+1} в симметрическую группу S_{n+1}, переводящего каждый образующий σ_i в транспозицию $(i,\ i+1)$, $i = \overline{1,n}$, называется группой крашеных кос. Коса, реализующая единичную подстановку, называется крашеной. Подгруппа крашеных кос группы B_{n+1} обозначается через R_{n+1}. В. Бурау[33] доказал, что элементы $s_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_i^2\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}, 1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, порождают группу крашеных кос R_{n+1}. Э. Артин доказал, что подгруппа $U_j, j = \overline{1,n}, (j+1)$ - чистых кос из R_{n+1}, порожденная элементами $s_{1,j+1}, s_{2,j+1}, \ldots, s_{j,j+1}$ является свободной, сами элементы $s_{1,j+1}, s_{2,j+1}, \ldots, s_{j,j+1}$ — свободными образующими $U_j, j = \overline{1,n}$, а всякая крашеная коса из R_{n+1} однозначно представима в виде произведения чистых кос $F_1F_2\ldots F_n$, где $F_j \in U_j, j = \overline{1,n}$.

Под шириной[34] вербальной подгруппы $\varphi(G)$, определенной в группе G словом φ, будем понимать наименьшее $m \in \mathbb{N}\bigcup\{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $\varphi(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $\varphi^{\pm1}$. Подгруппу $\varphi(G)$ будем называть собственной, если $\varphi(G) \neq 1$ и $\varphi(G) \neq G$.

Термин "ширина" введен Ю. И. Мерзляковым[35] в 1967 году, хотя ширина вербальных подгрупп исследовалась в более ранних работах. Так ширина вербальных подгрупп исследовалась в работах Шода (1936), Г. Хигма-

[30] Маканин Г. С. О нормализаторах группы кос // Математический сборник. — 1971. — Т. 86, №2. — С. 171-179.

[31] Гурзо Г. Г. О централизаторах конечных множеств элементов группы кос // Математические заметки. — 1985. — Т. 37, № 1. — С. 3-6.

[32] Маканина Т. А. Об одной системе уравнений в группе кос // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1986. — № 9. — С. 58-62.

[33] Burau W. Uber Zopfmvarianten // Abh. math. Seim. Univ. Hamburg. — 1932. — V. 9. — P. 117-124.

[34] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. — М.: Наука, 1987.

[35] Мерзляков Ю. И. Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. — 1967. — Т. 6, №1. — С. 83-94.

на, Б. Нейман и Х. Нейман (1949), Н. Ито (1951), Ф. Холла (1959) и многих других авторов. Наиболее общий результат принадлежит Ю. И. Мерзлякову: всякая вербальная подгруппа алгебраической группы $G \leq GL_n(\Omega), \Omega$ — алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над простым подполем, имеет конечную ширину относительно любого слова φ. В других работах выбирались конкретные группы G, слова φ и давались оценки ширины $\varphi(G)$.

Ряд работ посвящен исследованию ширины коммутанта некоторых классических групп относительно коммутатора $v = xyx^{-1}y^{-1}$. Н. Ито[36] доказал, что при $n \geq 5$ всякий элемент симметрической группы S_n является коммутатором. С. Оре[37] обобщил этот результат на группу подстановок счетного множества.

Проблема вычисления ширины симметрической и знакопеременной группы, а также линейной группы над конечным полем представляет интерес для криптографии[38].

Многие авторы изучали следующий вопрос: как меняется ширина вербальных подгрупп при различных групповых конструкциях.

В этом направлении А. Х. Ремтулла[39] доказал, что в нетривиальном свободном произведении $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$.

В. Г. Бардаковым[40] показано, что в свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где U — нормальная подгруппа в A и в B, а $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Р. И. Григорчуком[41] доказано, что для свободных произведений с объединением $A *_U B$, где $|A :: U| \geq 3$, $|B : U| \geq 2$, ширина всякой собственной

[36] Ito N. A. A theorem of alternating group A_n $(n \geq 5)$ // Math. Japon. — 1951. — V. 2, N 2. — C. 59-60.

[37] Ore S. Some remarks on commutators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. — V. 2. — P. 307-314.

[38] Глухов М. М., Зубов А. Ю. О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих // Математические вопросы кибернетики. — 1999. — №8. — С. 5-32.

[39] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1968. — V. 64, N 3. — P. 573-584.

[40] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, №5.— С. 494-517.

[41] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. — 1996. — Т. 59, №4. — С. 546-550.

вербальной подгруппы, определенной коммутаторным словом, бесконечна.

Автором [3] в 2000 году получен следующий результат : пусть $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$ и в B существует такой элемент b, что $UbU \neq Ub^{-1}U$, тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

В. А. Файзиев[42] в 2001 году доказал, что для свободных произведений с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

В. Г. Бардаковым показано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы для групп с одним определяющим соотношением и тремя образующими бесконечна. Распространить данный результат на группы с двумя порождающими и одним определяющим соотношением не удается, так как это неверно для групп $G_n =< a, t; t^{-1}at = a^n, n \in \mathbb{Z} \setminus 0 >$.

Р. И. Григорчук доказал, что для HNN-расширений, где связные подгруппы являются собственными свободными подгруппами в базовой группе, ширина всякой собственной вербальной подгруппы, определенной коммутаторным словом, бесконечна.

В. Г. Бардаковым доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Ряд исследований связан с изучением ширины вербальных подгрупп в группах кос. Это результаты Н. Н. Репина[43], Ю. С. Семенова[44], В. Г. Дурнева[45] и В. К. Шалашова[46]. В. Г. Бардаковым доказано, что группа кос[47] с двумя и более образующими, а также многие группы Артина[48] не имеют

[42] Faĭziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. — 2001. — V. 71. — P. 105-115.

[43] Репин Н. Н. О коммутаторных уравнениях в группах B_3 и B_4. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1986. — С. 114-117.

[44] Семенов Ю. С. О коммутаторах в группах кос // 10-й Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов.— Минск, 1986. — С. 207.

[45] Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // Деп. в ВИНИТИ. — 1987. — №4040-В87.

[46] Дурнев В. Г., Шалашов В. К. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // 19-я Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов.— Львов, 1987. — С. 89.

[47] Бардаков В. Г. К теории групп кос // Математический сборник. — 1992. — Т. 183, №6. — С. 3-42.

[48] Бардаков В. Г. Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, групповые и метрические свойства отображений // Сборник работ, посв. памяти Ю. И. Мерзлякова. — Новосибирск, 1995. — С. 8-18.

собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Цель работы и научная новизна

Целью диссертации является решение ряда известных проблем комбинаторной теории групп.

К *основным результатам диссертации* можно отнести следующие результаты.

Доказана разрешимость проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

Доказана разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

Доказана теорема о разрешимости проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа.

В группах Кокстера экстрабольшого типа доказана разрешимость проблем степенной сопряженности слов и пересечения циклических подгрупп.

Доказано, что любая конечно порожденная подгруппа группы Кокстера экстрабольшого типа, не содержащая элементов конечного порядка, является свободной.

Доказана разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов в группах крашеных кос.

Доказаны нерезрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группах крашеных кос R_{n+1} $(n \geq 4)$ и разрешимость данной проблемы в группе крашеных кос R_3.

Решена проблема ширины собственной вербальной подгруппы в свободном произведении групп с объединением.

Получены следующие *результаты, примыкающие к основным.*

Доказана разрешимость проблемы вхождения в параболическую подгруппу в группах Кокстера большого типа.

Доказано, что централизатор конечно порожденной подгруппы группы Кокстера большого типа есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие этого централизатора.

Доказано, что существует алгоритм, выписывающий образующие нормализатора любого конечного множества слов в группах Кокстера большого типа.

В группах Кокстера большого типа описаны элементы конечного порядка.

Доказано, что в группах Кокстера большого типа разрешима проблема корня.

Доказано, что если две подгруппы H_1 и H_2 из группы кос B_n сопряжены в B_p $(p > n)$, то H_1 и H_2 сопряжены в B_n.

Доказана конечная порожденность нормализатора конечно порожденной подгруппы в прямом произведении двух свободных групп ранга 2.

Описаны нормализаторы специальных классов подгрупп в группе крашеных кос R_5.

Доказана разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подполугрупп в группах Артина конечного типа.

Решена проблема построения нормализатора конечно порожденной подполугруппы в группах Артина конечного типа.

Рассмотрены вопросы пересечения нормализаторов конечного числа конечных множеств и подполугрупп в группах Артина конечного типа.

Доказана бесконечность ширины собственных вербальных подгрупп в некотором классе групп с двумя порождающими и одним определяющим соотношением, а также в некоторых HNN-расширениях, где хотя бы одна из связных подгрупп совпадает с базовой группой.

Исследована ширина вербальных подгрупп групп Артина с двумя образующими.

Все результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования

Проводимые в диссертации исследования базируются на комбинаторных и геометрических методах теории групп.

Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в различных разделах теории групп. Развитые в диссертации вопросы важны для дальнейших исследований алгоритмических проблем в группах. Многие доказанные в диссертации теоремы могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Аппробация работы

Результаты работы докладывались на: X-й Всесоюзной конференции по математической логике (Алма-Ата, 1990 г.); семинаре под руководством М. М. Лесохина (ЛГУ, 1991 г.); семинаре по теории групп под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского (МГУ, 1996 г.); III-й международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее применения"(ТГПУ, 1996 г.); V-ой международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (ТГПУ, 2003 г.); открытом научном семинаре "Кольца и модули" под руководством С. А. Пихтилькова с участием А. В. Михалева, В. Н. Латышева, В. Н. Чубарикова (ТГПУ, 2005 г.); международной алгебраической конференции, посвященной 100 - летию со дня рождения А. Г. Куроша (МГУ, 2008 г.); ежегодной международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики" (ТулГУ, 2000, 2005-2008 г.г.); Тульском городском научном семинаре по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп под руководством В. Н. Безверхнего (1990-2009 г.г.); расширенном заседании Тульского городского научного семинара по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп под руководством В. Н. Безверхнего с участием А. Л. Шмелькина (2009 г.); научно-исследовательском семинаре по алгебре кафедры высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова (2009 г.).

Работы были выполнены по грантам РФФИ 00-01-00767, 03-01-00198, 08-01-00790 и Министерства образования РД 02-1.1-209.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [28].

Объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, восемнадцати разделов и списка литературы из 100 наименований. Диссертация содержит 230 страниц машинописного текста.

Содержание работы

Во введении изложена предыстория исследуемых в диссертации вопросов, собраны важнейшие факты, необходимые в дальнейшем изложении, дан обзор содержания диссертации.

Первая глава посвящена изучению проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

В первом разделе первой главы рассматриваются диаграммы над группой Кокстера большого типа G, заданной системой образующих a_i, $i \in J$, $|J| < \infty$, и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$, $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $i, j \in J$, m_{ij} — элемент матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, соответствующей данной группе, причем $m_{ij} \geqslant 3$ для $i \neq j$.

Пусть $F = \prod\limits_{i=1}^{n} *(F_i =< a_i; a_i^2 >)$ — свободное произведение циклических групп порядка 2, $R = \bigcup\limits_{i,j \in J} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F, R_{ij} — множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в двупорожденной группе Кокстера большого типа G_{ij}.

Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное единице в группе Кокстера большого типа G, то есть $w \in< R >^F$, где $< R >^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F. Тогда существует связная односвязная диаграмма M группы Кокстера с граничной меткой w, областями которой являются R_{ij}-диаграммы.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. При этом возможно, что метка границы полученой области равна единице в свободном произведении F. Тогда, удалив эту область, склеиваем её границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице, и получаем, что каждая приведенная связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$.

Обозначим через ∂M граничный цикл M. Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \bigcap \partial D \neq \emptyset$. Символом $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, символом $d(D)$ — число всех ребер в граничном цикле D. Будем говорить, что $\partial D \bigcap \partial M$ есть последовательная часть M, если $\partial D \bigcap \partial M$ — объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовем простой, если $\partial D \bigcap \partial M$ есть последовательная часть M.

Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < 3$.

Пусть M — приведенная связная, односвязная R-диаграмма группы Кокстера большого типа. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \geqslant 2$, образует полосу[49] в M, если:

1) $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial D_i \bigcap \partial M$ — последовательная часть M;

2) $\forall i$, $1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;

3) $i(D_1) = i(D_n) = 3$ и $\forall j$, $1 < j < n$, $i(D_j) = 4$.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

[49] Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в $C(p)\&T(q)$-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1994. — С. 4-58.

Лемма 6. *Пусть M — приведенная связная диаграмма M группы Кокстера большого типа, содержащая $(s-i)$-области, тогда $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ содержат одну букву.*

Удаление деновской области диаграммы M, то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R-сокращением.

Пусть Π — полоса диаграммы M, $\partial M = \gamma\bigcup(\partial\Pi\bigcap\partial M)$, а $\gamma_1 = \partial\Pi \setminus (\partial\Pi\bigcap\partial M)$. Замену диаграммы M на диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, в результате чего граничный цикл M преобразуется в граничный цикл $\partial M_1 = \gamma\gamma_1$, назовем специальным R-сокращением или $\overline{R}$-сокращением. Если M не содержит полос, то назовем M специально R - приведенной или $\overline{R}$-приведенной.

Слово $w \in G$, G — группа Кокстера большого типа, назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| \leqslant 2$. Назовем w циклически R-приведенным, если все его циклические перестановки являются R - приведенными словами. R-приведенное слово w группы Кокстера большого типа G назовем специально R-приводимым или $\overline{R}$-приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1s_2\cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1}d_t^{-1}b_td_{t+1} \in R$, причем при $t=1$ и $t=n$ $\quad |d_1| = |b_1| = |d_2| = |d_n| = |b_n| = |d_{n+1}| = 1$ и для t, $1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = 2$.

Лемма 9. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w R-приведенным.*

Лемма 10. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведенного слова w из группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w специально R-приведенным.*

Аналогично рассматриваются кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа.

Далее в данном разделе изучаются кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа, не содержащие $(s-i)$-областей и, следовательно, удовлетворяющие условию $C(6)$.

Кольцевую связную приведенную однослойную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа, метки которой $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ приведены в F, $\varphi(\sigma)$ — R-приведено и специально R-приведено, назовем особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))| = 3$, а для остальных областей D' $|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \sigma))| = 4$. Слово $\varphi(\tau)$ является циклически R-приведенным и циклически специально R-приведенным. Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Лемма 19. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведенного, циклически специально R-приведенного слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R-сокращение.*

Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера большого типа обладает свойством s, если w циклически R-несократимо, циклически специально R-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.

Кольцевую связную приведенную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ назовем простой, если $|M| \geqslant 1$ и $\sigma \bigcap \tau \neq \emptyset$; M назовем вырожденной, если $|M| = 0$, где $|M|$ — число областей диаграммы M.

Кольцевая связная приведенная R-диаграмма M с граничными циклами σ, τ называется n-слойной, $n \geqslant 1$, если после последовательного удаления граничных слоев получим вырожденную кольцевую R-диаграмму и называется $C-n$-слойной, если в результате удаления указанных выше граничных слоев получим простую кольцевую R-диаграмму.

Далее рассматриваются кольцевые связные приведенные R-диаграммы M сопряженности слов групп Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ, у которых не каждая граничная область является простой. При этом кольцевая R-диаграмма M может быть одного из следующих видов:

1^0. $\sigma \bigcap \tau = \emptyset$, каждая область $D \in M$ граничная, $\partial D \bigcap \partial M$ — несвязное множество, $i(D) = 2$.

2^0. $\sigma \bigcap \tau \neq \emptyset$.

3^0. $\sigma \bigcap \tau = \emptyset$, существует область D, $i(D) > 2$, $\partial D \bigcap \partial M$ — несвязное множество.

Показывается, что следующие преобразования укорачивают длину циклического слова w:

π_1) циклическое сокращение w в свободном произведении F;

π_2) циклическое R-сокращение в G;

π_3) циклическое специальное R-сокращение в G;

π_4) кольцевое специальное R-сокращение в G;

π_5) переход от w к сопряженному слову u, $|u| < |w|$, с помощью кольцевой диаграммы вида 1^0;

π_6) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 2^0;

π_7) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 3^0.

Слово w, полученное из v применением к нему преобразований $\pi_1) - \pi_7)$ в G, назовем тупиковым для v, если оно инвариантно относительно этих преобразований.

Доказывается, что для любого слова $v \in G$ можно эффективно построить соответствующее ему тупиковое слово w.

Лемма 23. *Пусть $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, v обладает свойством s и w — тупиковое для v слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |w|$, не сопряжено с v.*

Кольцевую связную приведенную R-диаграмму M сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$, где σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, назовем минимальной, если не существует кольцевой R-диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей.

Лемма 24. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ. Пусть $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Если M — n-слойная либо $C-n$-слойная диаграмма с $n > 1$, то для любой области $D \subset M$ выполняется $d(D) = 6$.*

Второй раздел первой главы посвящен решению проблемы вхождения в параболическую подгруппу в группах Кокстера большого типа.

Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих

A, определяемая матрицей Кокстера M_A. Тогда подгруппа G_j, порожденная множеством $A_j \subset A$, есть группа Кокстера большого типа, определяемая матрицей Кокстера M_j, полученной из M_A удалением строк и столбцов, именованных образующими из $A \setminus A_j$. Данная подгруппа G_j является параболической.

Лемма 25. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма вида $C(6)$ с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа G. Пусть $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ обладают свойством s, $\varphi(\sigma)$ — слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, A — множество образующих G, $\varphi(\sigma)$ не является образующим из A_j. Тогда $\varphi(\tau) \in G_j$ и слова $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ сопряжены в G_j.*

Следствие 1. *Пусть u, $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, A — множество образующих G, u, v обладают свойством s и существует $z \in G$ такое, что $z^{-1}uz = v$. Тогда, если слово u есть слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, и не является образующим из A_j, то $v \in G_j$ и существует $z' \in G_j$, $z' = z$ в G, такое, что $z'^{-1}uz' = v$.*

Следствие 2. *Пусть G — группа Кокстера большого типа на образующих A, G_j — параболическая подгруппа G на множестве образующих $A_j \subset A$, слово u обладает свойством s, $u \in G_j$ и не является образующим из A_j, тогда $N_G(u) = N_{G_j}(u)$.*

Лемма 26. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма группы Кокстера большого типа G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если M содержит $(s-i)$-область, то все области M являются $(s-i)$-областями.*

Лемма 28. *Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A. Если $v_0 \in G$, $v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R-приведенное, специально R-приведенное слово, равное слову из параболической подгруппы G_j с образующими A_j, $A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j.*

Теорема 4. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема вхождения в параболическую подгруппу.*

В третьем разделе первой главы решается проблема сопряженности слов в группах Кокстера большого типа. Доказывается

Теорема 5. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема сопряженности слов.*

Вторая глава посвящена изучению других алгоритмических проблем в группах Кокстера большого типа.

В первом разделе изучается проблема обобщенной сопряженности слов.

Теорема 6. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера большого типа G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.*

Показывается, что централизатор элемента в группах Кокстера большого типа в общем случае не является циклической подгруппой.

Показывается, что в общем случае группы Кокстера большого типа не являются гиперболическими группами. Рассмотрим группу $G =< a, b, c; aba = bab, aca = cac, bcb = cbc, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 >$. Данная группа содержит свободную абелеву подгруппу $< (abc)^2, (bac)^2; (abc)^2(bac)^2 = (bac)^2(abc)^2 >$, а потому не может быть гиперболической.

Теорема 7. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 8. *Пусть G – группа Кокстера большого типа и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – слова из G. Если F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, является множеством всех решений системы.*

Теорема 9. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из группы Кокстера большого типа G выписать образующие их нормализатора.*

Во втором разделе второй главы описываются элементы конечного порядка в группах Кокстера большого типа.

Теорема 10. *Слово w группы Кокстера большого типа G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ab} =< a, b; (ab)^{m_{ab}} = 1, a^2 = b^2 = 1 >$.*

В третьем разделе второй главы доказывается алгоритмическая разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа.

Теорема 11. *Пусть слово $w \in G$ имеет бесконечный порядок. Тогда любая степень слова, сопряженного w или w^2 в группе G, циклически R и специально R-несократима.*

Пусть в группе Кокстера большого типа G $w^n = v$. Тогда $(w^2)^n = v^2$. Заменим w^2 на сопряженное с ним циклически R-несократимое и специально R-несократимое слово w_0 в соответствии с теоремой 11. Получим $w_0^n = z^{-1}v^2z$. Заменим $z^{-1}v^2z$ равным ему в группе G R-несократимым и специально R-несократимым словом v_0. Тогда существует приведенная связная односвязная R-диаграмма M такая, что $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = w_0^n v_0^{-1}$, где γ, δ гомеоморфны отрезку.

Связная односвязная диаграмма M называется диском, если ее граничный цикл ∂M — простая замкнутая кривая.

Будем считать, что M — диск, $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w_0^n$ и $\varphi(\delta) = v_0$, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$ — две вершины.

Теорема 12. *Пусть M — приведенная диаграмма, являющаяся диском, $\partial M = \gamma \cup \delta$, где $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ — R-несократимые и специально R-несократимые слова, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$. Тогда число областей, граничащих с γ и δ, одинаково.*

Пусть M — связная односвязная приведенная диаграмма, $\partial M = \gamma \cup \delta$, пусть $\varphi(\gamma) = w_0^n$, $\varphi(\delta) = v_0$ и r_0 — самое длинное слово из R. Тогда $n < 4|v_0||r_0|$.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема корня, если существует алгоритм, позволяющий для любого $w \in G$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$ и $x \in G$ такие, что $x^n = w$.

Следствие 6. *В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема корня.*

В четвертом разделе второй главы изучается проблема слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ таких, что $w \notin < v >$, установить, существует ли целое число n такое, что слова w^n, v сопряжены в группе G.

Теорема 13. *В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов.*

В третьей главе рассматриваются некоторые проблемы в группах Кокстера экстрабольшого типа.

Первый раздел посвящен проблеме степенной сопряженности слов. В начале этого раздела изучаются диаграммы над группами Кокстера экстрабольшого типа, которые строятся так же, как и диаграммы над группами Кокстера большого типа. Каждая приведенная связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера экстрабольшого типа удовлетворяет условию $C(8)$.

Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.

Пусть M_1 — приведенная связная, односвязная поддиаграмма R - диаграммы M группы Кокстера экстрабольшого типа с границей $\partial M_1 = e_1\gamma e_2\delta$, где e_1 — ребро AB, γ – путь BC, e_2 — ребро CD, δ — путь DA. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ из M_1 $(e_1 \in D_1, e_2 \in D_n), n \geqslant 2$, образует полосу в M, если:

1) $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \partial D_i \bigcap \gamma, \partial D_i \bigcap \delta$ – последовательная часть M_1;

2) $\forall i,\ 1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;

3) $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \cap \delta| + 2, |\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \delta| + 2$ и $|\partial D_j \cap \gamma| = |\partial D_j \cap \delta|, 2 \leqslant j < n$.

Слово $w \in G$, G — группа Кокстера экстрабольшого типа, назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| < |s|$. R-приведенное слово w группы Кокстера экстрабольшого типа G назовем специально R-приводимым или $\overline{R}$-приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n \quad |d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|s_t| = |b_t| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = |s_t|$.

Лемма 52. *Пусть M — приведенная связная односвязная R - диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа; σ — граничный цикл M, слово $\varphi(\sigma)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимо. Тогда M является однослойной.*

Лемма 53. *Пусть M — приведенная связная кольцевая диаграмма со-*

пряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера экстрабольшого типа, не содержащая $(s-i)$-областей; σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G.

Теорема 16. *В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, пусто или нет пересечение циклических подгрупп, порожденных в G данными словами.

Теорема 17. *В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема пересечения циклических подгрупп. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Во втором разделе доказывается, что если E и C — элементы бесконечного порядка группы Кокстера экстрабольшого типа G, не являющиеся степенями одного и того же слова, то существует натуральное число γ такое, для E^γ и C не выполняется нетривиальное тождество. Как следствие получаем, что в группах Артина экстрабольшого типа не выполняется нетривиальное тождество.

В третьем разделе изучаются подгруппы в группах Кокстера экстрабольшого типа.

Теорема 20. *Всякая конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера G экстрабольшого типа является свободной.*

Показано, что множество образующих конечно порожденной подгруппы без кручения группы Кокстера G экстрабольшого типа можно выбрать так, что любой элемент этой подгруппы однозначно записывается в этих образующих.

Четвертая глава посвящена изучению алгоритмических проблем и описанию нормализаторов в группах крашеных кос и группах Артина конечного типа.

В первом разделе изучается проблема обобщенной сопряженности слов в группах крашеных кос.

Рассмотрим гомоморфизм группы B_{n+1} в группу подстановок S_{n+1}, отображающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = \overline{1, n}$. Коса, реализующая единичную подстановку, называется крашеной. Подгруппа крашеных кос группы B_{n+1} обозначается через R_{n+1}.

Теорема 22. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы B_{n+1}. Тогда существует алгоритм, строящий порождающие подгруппы $H \bigcap R_{n+1}$.*

Следствие 10. *В группе крашеных кос R_3 разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Следствие 11. *Централизатор конечного множества элементов из R_{n+1} конечно порожден в R_{n+1}. Существует алгоритм, строящий образующие этого централизатора.*

Следствие 12. *В R_{n+1} разрешима проблема обобщенной сопряженности слов. Более того, если F есть решение системы $\&_{i=1}^{n}(x^{-1}a_i x) = b_i$ в R_{n+1}, то множество всех решений этой системы в R_{n+1} записывается в виде $D = C_{R_{n+1}}(\{a_i\}_{i=\overline{1,n}})F$, где $C_{R_{n+1}}(\{a_i\}_{i=\overline{1,n}})$ — централизатор $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ в группе крашеных кос R_{n+1}.*

Следствие 13. *Нормализатор конечного множества элементов из R_{n+1} конечно порожден в R_{n+1}. Существует алгоритм, строящий образующие этого нормализатора.*

Во втором разделе изучается проблема сопряженности подгрупп в группах крашеных кос.

Лемма 67. *Пусть в группе B_{n+1} выполнены равенства:*

$$\&_{\omega\in\Omega}(A_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = X(\sigma_1, \dots, \sigma_n)B_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})X^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)).$$

Тогда существует такая коса K, что

$$\&_{\omega\in\Omega}(A_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = K(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})B_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})K^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})).$$

Теорема 25. *Если две подгруппы H_1 и H_2 из B_n сопряжены в B_p $(p > n)$, то они сопряжены и в B_n.*

Следствие 15. *Если подгруппы* $H_1 \subset B_n$ *и* $H_2 \subset B_n$ *и существует* $Z \in R_p\,(p > n)$ *такое, что* $H_1Z = ZH_2$ *в* B_p, *тогда найдется* $Z' \in R_n$ *такое, что* $H_1Z' = Z'H_2$ *в* B_n.

Теорема 29. *В* R_{n+1} $(n \geqslant 4)$ *неразрешима проблема сопряженности подгрупп.*

В третьем разделе дано описание нормализаторов некоторых классов подгрупп в группах крашеных кос.

Теорема 30. *Пусть* $G = F_1 \times F_2$ *— прямое произведение двух свободных групп ранга 2. Пусть* H *— конечно порожденная подгруппа из* G. *Тогда нормализатор* $N_G(H)$ *конечно порожден.*

Рассмотрим в R_5 подгруппу Π, порожденную элементами $\sigma_1^4, \sigma_2^4, \sigma_4^2, d$, где $d = \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4$. Тогда $\Pi =< \sigma_1^4, \sigma_2^4 > \times < \sigma_4^2, d >$ — прямое произведение двух свободных групп ранга 2.

Теорема 31. $N_{R_5}(\Pi) =< \Delta^2, \Delta'^2, \Pi >$, *где* $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$, $\Delta' = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа из $\Pi =< \sigma_1^4, \sigma_2^4 > \times < \sigma_4^2, d >$ с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$, имеющими вид: $a_i = L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)M_i(\sigma_4^2, d), i = \overline{1, n}$. Подгруппа H_1, порожденная $L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $i = \overline{1, n}$, есть проекция H на $\Pi_1 =< \sigma_1^4, \sigma_2^4 >$, а подгруппа H_2, порожденная $M_i(\sigma_4^2, d)$, $i = \overline{1, n}$, — проекция H на $\Pi_2 =< \sigma_4^2, d >$.

Теорема 32. *Если* H_1 *и* H_2 *не являются циклическими, то* $N_{R_5}(H) \subset N_{R_5}(\Pi)$.

Лемма 83. $N_{B_m}(H)/C_{B_m}(H) \simeq N_{B_n}(H)/C_{B_n}(H)$.

Теорема 33. *Нормализатор подгруппы* $H \subset B_m$ *в* B_n $(n > m)$ *является расширением централизатора подгруппы* H *в* B_n *с помощью фактор-группы* $N_{B_m}(H)/C_{B_m}(H)$.

В четвертом разделе изучаются нормализаторы в группах Артина конечного типа.

Полугруппа Артина конечного типа G^+ задается теми же образующими, что и группа Артина конечного типа G.

Теорема 38. *Пусть* G *— группа Артина конечного типа и* H *— конечно порожденная подполугруппа полугруппы* G^+. *Тогда нормализатор* H *в* G

конечно порожден. Существует алгоритм, строящий образующие этого нормализатора.

Теорема 39. *Существует алгоритм, позволяющий установить, сопряжены ли две конечно порожденные подполугруппы G^+ E и L в G^+ или нет.*

Теорема 40. *Пересечение нормализаторов конечного числа конечно порожденных подполугрупп полугруппы G^+ группы Артина G конечного типа конечно порождено. Существует алгоритм, строящий образующие этого пересечения.*

Теорема 41. *Пересечение нормализаторов конечного числа конечных множеств группы Артина G конечного типа конечно порождено. Существует алгоритм, строящий образующие этого пересечения.*

В пятой главе изучается проблема ширины вербальных подгрупп в некоторых классах групп.

В первом разделе дается решение проблемы ширины вербальных подгрупп в свободных произведениях групп с объединением.

Теорема 46. *Пусть $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$ и в B существует такой элемент b, что $UbU \neq Ub^{-1}U$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.*

Теорема 47. *В свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.*

Показывается, что если $|A : U| \leq 2$ и $|B : U| \leq 2$, то ширина вербальной подгруппы $\varphi(G)$ бесконечна тогда и только тогда, когда ширина $\varphi(U)$ бесконечна.

Во втором разделе дается решение проблемы ширины в некотором классе групп с двумя порождающими и одним определяющим соотношением.

Рассматривается ширина собственной вербальной подгруппы $\varphi(G)$ для групп $G =< a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w(a, b) >$, где $w(a, b)$ — непустое слово в свободной полугруппе $<< a, b >>$. Доказывается, что если $w(a, b) = av(a, b)a,\ a,\ a^2$, то ширина $\varphi(G)$ бесконечна.

Рассмотрим группу $G =< a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = av(a, b)b^{\mu} >$, где $v(a, b)$

— непустое слово в свободной полугруппе $<< a, b >>$.

Положим $b = ca^\mu$. Тогда данную группу можно рассматривать в виде $G =< a, c, t;\ t^{-1}at = ca^\mu,\ t^{-1}ct = w(a, ca^\mu) >$, где $w(a, ca^\mu) = a \ldots ca^{\mu+i}, i > 1$.

Пусть $log_a x$ означает сумму показателей при a в слове x.

Теорема 51. *Пусть* $G =< a, c, t;\ t^{-1}at = ca^\mu,\ t^{-1}ct = w(a, ca^\mu) >$, *где* $w(a, ca^\mu) = a \ldots ca^{\mu+i}$, $i > 1$, *— положительное слово. Если существует такое простое число* p *в разложении* $log_a w$ *на простые множители, что* $\mu \equiv 1\,(mod\,p)$, *то ширина собственной вербальной подгруппы* $\varphi(G)$ *бесконечна.*

Теорема 52. *Пусть* $G =< a, b, t;\ t^{-1}at = b,\ t^{-1}bt = ab^\mu >$. *Тогда произвольная собственная вербальная подгруппа имеет бесконечную ширину.*

В третьем разделе изучается ширина вербальных подгрупп в HNN - расширениях, где хотя бы одна из связных подгрупп совпадает с базовой группой, вида $G =< a_1, a_2, \ldots, a_n;\ t^{-1}a_1t = a_{i+1},\ i = \overline{1, n-1},\ t^{-1}a_nt = w(a_1, \ldots, a_n) >$, где $w(a_1, \ldots, a_n)$ — непустое слово в свободной полугруппе $<< a_1, \ldots, a_n >>$. Показывается, что если $w = a_1v(a_1, a_2, \ldots, a_n)a_1,\ a_1,\ \ a_1^2$, то ширина всякой собственной вербальной подгруппы $\varphi(G)$ бесконечна.

В четвертом разделе основным результатом является

Теорема 58. *В группах Артина с двумя образующими решена проблема ширины.*

Доказывается, что в двупорожденной группе Артина G_{ij} с $m_{ij} \geqslant 3$, $i \neq j$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ

[1] Добрынина И. В. К вопросу о ширине в свободном произведении с объединением // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 1999. — Т. 5, №1. — С. 114-115. — 0,13 п. л.

[2] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашеных кос R_5 // Математические замет-

ки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 15-22. — 0,5 п. л. (авторский вклад 0,4 п. л.)

[3] Добрынина И. В. О ширине в свободных произведениях с объединением // Математические заметки. — 2000. — Т. 68, №3. — С. 353-359. — 0,44 п. л.

[4] Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя порождающими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2001. — Т. 7, №2. — С. 95-102. — 0,5 п. л. (авторский вклад 0,4 п. л.)

[5] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, №1. — С. 19-31. — 0,81 п. л. (авторский вклад 0,65 п. л.)

[6] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2003. — Т. 9, №1. — С. 13-22. — 0,63 п. л. (авторский вклад 0,5 п. л.)

[7] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2004. — Т. 10, №1. — С. 23-37. — 0,94 п. л. (авторский вклад 0,75 п. л.)

[8] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2004. — Т. 10, №1. — С. 38-46. — 0,56 п. л. (авторский вклад 0,45 п. л.)

[9] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, №3. — С. 123-145. — 1,44 п. л. (авторский вклад 1,15 п. л.)

[10] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, №3. — С. 101-110. — 0,63 п. л. (авторский вклад

0,5 п. л.)

[11] Добрынина И. В. О тождествах в группах Артина экстрабольшого типа // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. — 2009. — №3. — С. 5-11. — 0,44 п. л.

[12] Добрынина И. В. О некоторых диаграммах групп Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. — 2009. — №3. — С. 12-23. — 0,75 п. л.

Статьи и тезисы

[13] Добрынина И. В. О нормализаторах в группах Артина конечного типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1990. — С. 156-163. — 0,5 п. л.

[14] Добрынина И. В. О нормализаторах в группах Артина конечного типа // X Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов. — Алма-Ата, 1990. — С. 61. — 0,06 п. л.

[15] Добрынина И. В. О нормализаторах подгрупп в группе кос B_3 // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1991. — С. 138-144. — 0,44 п. л.

[16] Добрынина И. В. О сопряженности подгрупп в группах кос // Третья Международная конференция по алгебре памяти М. И. Каргаполова. Тезисы докладов. — Красноярск, 1993. — С. 111. — 0,06 п. л.

[17] Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашеных кос $R_{n+1}(n \geq 5)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 1994. — С. 62-70. — 0,56 п. л.

[18] Добрынина И. В. О ширине вербальных подгрупп в некотором классе групп // Универсальная алгебра и её приложения. Тезисы докладов международного семинара по алгебре памяти Л. А. Скорнякова. — Волгоград, 1999. — С. 28.— 0,06 п. л.

[19] Добрынина И. В. Проблема конечной ширины в одном классе групп // Сборник научных работ профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов ТГПУ им. Л. Н. Толстого. — 1999. — С. 194-195. — 0,13 п. л.

[20] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О ширине в одном HNN-расширении // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — Тула, 2001. — С. 69-78. — 0,63 п. л. (авторский вклад 0,49 п. л.)

[21] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими // Чебышевский сборник. — 2002. — Т. 3, № 1 (3). — С. 11-16. — 0,38 п. л. (авторский вклад 0,29 п. л.)

[22] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сборник. — Тула, 2003. — Т. 4, №1(5). — С. 10-33. — 1,5 п. л. (авторский вклад 1,2 п. л.)

[23] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме корня в группах Кокстера большого типа // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов V Международной конференции. — Тула, 2003. — С. 41-42. — 0,13 п. л. (авторский вклад 0,1 п. л.)

[24] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О пересечении циклических подгруппв группах Кокстера экстрабольшого типа // Труды международной научно-практической конференции "Л. Эйлер и российское математическое образование, наука и культура". — Тула, 2007. — С. 16-26. — 0,69 п. л. (авторский вклад 0,54 п. л.)

[25] Добрынина И. В. О подгруппах в группах Кокстера экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. — 2008. — Т. 9, № 1 (25). — С. 9-15. — 0,44 п. л.

[26] Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера экстрабольшого типа // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14, №8. — С. 101-116. — 1 п. л.

[27] Добрынина И. В. О тождествах в группах Кокстера экстрабольшого типа // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М., 2008. — С. 85. — 0,06 п. л.

[28] Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях групп с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15, №1. — С. 23-30. — 0,5 п. л.