На правах рукописи

Глазков Дмитрий Владимирович

ЛОКАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Кащенко Сергей Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Майоров Вячеслав Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор
Старков Сергей Олегович

Ведущая организация: Институт прикладной математики РАН
им. М.В. Келдыша

Защита состоится «____»__________ 2008 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «____»__________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Уравнения лазерной динамики традиционно представляют собой важнейшую область приложения нелинейной теории. В их числе видное место занимают полупроводниковые лазеры. Повышенный интерес к этой области науки вызван многочисленными технологическими приложениями устройств, основанных на сравнительно дешевых полупроводниковых элементах. Это CD- и DVD-технологии, системы коммуникации, в частности, оптико-волоконная связь, спектроскопия, лазерная полиграфия, звуковые и видео системы, проекционное лазерное телевидение и оптическая обработка информации.

В таких областях, как хранение данных или оптические коммуникации отражения и связанные с ними сопутствующие эффекты неизбежны. Например, искажения сигнала при передаче данных нередко обусловлены неминуемыми отражениями от торцов волноводов. Те же самые причины зачастую приводят к возможным ошибкам при чтении CD и DVD дисков.

Поэтому основным объектом теоретических и экспериментальных исследований в области лазерной физики традиционно выступают всевозможные типы неустойчивостей, которые ограничивают возможности практического применения лазерных устройств. Одной из причин нежелательных феноменов является воздействие на резонатор отраженного вторичного излучения. Такой эффект хорошо описывается на языке нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Подобные уравнения по ряду причин достаточно сложны. Поэтому многие явления в моделях с запаздыванием до сих пор не имеют удовлетворительного объяснения.

В числе обзорных статей и книг, посвященных лазерной физике, особо отметим работы таких авторов как Я.И. Ханин[1] и G.H.M. Van Tartwijk[2], в которых систематизируются результаты работы сотен исследователей.

Плодотворный подход к исследованию динамики нелинейных систем, в том числе лазерных, связан с построением специальных эволюционных уравнений для параметров порядка. Идея выделения некоторой совокупности переменных и перехода к универсальным уравнениям, описывающим локальную динамику исходной задачи, открывает путь к систематизации явлений самоорганизации и других феноменов, наблюдаемых в нелинейных моделях. Классический пример реализации этой идеи — метод нормальных форм. Его суть состоит в сведении задачи изучения локальной динамики многомерных систем при значениях набора параметров, близких к критическому, к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида.

[1] *Ханин, Я.И.* Основы динамики лазеров / Я.И. Ханин. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 368 с. — ISBN 5-02-014375-8.

[2] *Van Tartwijk, G.H.M.* Laser instabilities: a modern perspective / G.H.M. Van Tartwijk, G.P. Agrawal // Progress in Quantum Electronics. — 1998. — Vol. 22. — P. 43–122.

Та же самая идея лежит в основе метода построения квазинормальных форм, развиваемого в работах С.А. Кащенко[3], А.Б. Васильевой[4], Ю.С. Колесова[5], А.Ю. Колесова[6], Н.Х. Розова. Важнейшей особенностью, характерной для данной ситуации, является тот факт, что при бифуркационных значениях параметров на мнимой оси оказывается счетное число точек спектра оператора линеаризованной задачи. Тем самым универсальные эволюционные уравнения, описывающие локальную динамику исходной задачи, имеют бесконечную размерность.

Отмеченные особенности часто встречаются в прикладных задачах. Примерами таких приложений могут служить математические модели динамики лазеров с запаздывающей обратной связью. Рассматриваемые в работе модели так или иначе связаны с хорошо известной системой уравнений Ланга-Кобаяши[7]:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, величина $Z(t)$ пропорциональна инверсии носителей; $\gamma>0$ и $-\omega_0 h$ — сила и фаза обратной связи, ω_0 — оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h — время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Хорошая согласованность этой модели с экспериментальными данными, отмеченная во многих работах, предоставляет широкие возможности использования теоретических результатов на практике. Так, теоретическое исследование в рамках модели Ланга-Кобаяши необычных высокочастотных колебаний, обнаруженных[8] в середине 90-х годов[9], успешно используется при

[3] *Кащенко, С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, №2. — С. 262–270.

[4] *Васильева, А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А.Б. Васильева [и др.] // Математический сборник. — 1986. — Т. 130(172), №4(8). — С. 488–499.

[5] *Колесов, Ю.С.* Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / Ю.С. Колесов // Украинский математический журнал. — 1987. — Т. 39, №1. — С. 28–34.

[6] *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М., 2004.

[7] *Lang, R.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties / R. Lang, K. Kobayashi // IEEE J. Quantum Electron. — 1980. — Vol. 16(1), №3. — P. 347–355.

[8] *Tager, A.A.* Stability regimes and high-frequency modulation of laser diodes with short external cavity / A.A. Tager, B.B. Elenkrig // IEEE J. Quantum Electron. — 1993. — Vol. 29, №12. — P. 2886–2890.

[9] *Tager, A.A.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes / A.A. Tager, K. Petermann // IEEE J. Quantum Electron. — 1994. — Vol. 30, №7. — P. 1553–1561.

разработке новых скоростных и помехоустойчивых технологий оптической связи. Эти же цели преследует изучение регулярных импульсных пакетов[10], механизмов потери устойчивости и перехода к хаотической динамике в режимах низкочастотных флуктуаций и когерентного коллапса.

Качественное исследование моделей лазерной динамики с запаздыванием в различных критических случаях представляет собой тему диссертационной работы. Изучаются ситуации, когда значения одного или нескольких параметров системы асимптотически велики. Возникающие при этом сингулярно возмущенные задачи не могут быть напрямую качественно исследованы регулярными методами. Переход к регулярным уравнениям, которые не содержат больших параметров и допускают надежные численные результаты, позволяет аналитически оценить асимптотическое поведение систем в критических случаях. Такого рода оценки дают возможность глубже понять свойства исходных физических моделей и приблизиться к пониманию экспериментально наблюдаемых процессов и феноменов.

Результаты, полученные для системы, учитывающей воздействие оптического фильтра, и систем, параметры которых являются переменными величинами, позволяют сделать содержательные выводы о возможностях преодоления нежелательных эффектов, обусловленных отраженным излучением.

Цели работы

В качестве основной цели исследования выступает выявление особенностей динамики дифференциально-разностных моделей лазерных систем при значениях параметров, близких к критическим. Ставится задача определения областей параметров с регулярным и хаотическим поведением, областей мультистабильности для различных моделей с целью теоретического решения проблем эффективного управления излучением лазера, в частности, стабилизации генерации. Особое внимание уделено критическим случаям бесконечной размерности, которые исследуются методом большого параметра.

Методика исследования

Методы исследования сингулярно возмущенных уравнений и методы регуляризации таких задач, связанные с построением систем бесконечной размерности, играющих роль нормальных форм, были предложены в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова[11], С.А. Кащенко[12].

[10] *Tabaka, A.* Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback / A. Tabaka [et al.] // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70, 036211: P. 1–9.

[11] *Васильева, А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

[12] *Кащенко, С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, №10. — С. 1343–1355.

Наличие в системе большого параметра приводит к необходимости рассматривать сингулярно возмущенную задачу. Задачи этого типа не могут быть качественно исследованы регулярными методами. Главное преимущество используемой в работе методики состоит в переходе от сингулярно возмущенной задачи к регулярным уравнениям, которые больших параметров уже не содержат[13].

Научная новизна

По мнению автора, к новым результатам, полученным в диссертационной работе, можно отнести результаты использования специальных асимптотических методов для исследования асимптотического поведения нескольких моделей лазерной динамики. Построены и изучены новые уравнения специального вида — квазинормальные формы исходных систем. Полученные редуцированные системы являются минимальными для описания локальной динамики исходных моделей при значениях параметров, близких к критическим. Подчеркнем, что они, как и исходные модели, представляют собой системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. В ходе их исследования удалось подтвердить уже известные результаты, а также получить ряд новых.

Положения, выносимые на защиту

1. Асимптотические приближения решений нескольких систем уравнений, моделирующих динамику лазера с запаздывающей обратной связью, при значениях параметров, близких к критическим.

2. Результаты численно-аналитического исследования полученных новых систем уравнений — квазинормальных форм.

3. Классификация критических случаев бесконечной размерности для модели Ланга-Кобаяши и системы с оптическим фильтром.

4. Способы стабилизации излучения лазера на основе анализа нормализованных уравнений.

5. Нормальная форма одного семейства дифференциальных уравнений с запаздыванием и бифуркация, приводящая к возникновению цикла асимптотически большого периода.

[13] *Кащенко, С.А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах / С.А. Кащенко // Известия РАЕН, серия МММИУ. — 1998. — Т. 2, №4. — С. 5–53.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Главным достоинством использованного подхода является переход от сингулярно-возмущенных задач к регулярным уравнениям, допускающим надежный численный анализ. Практическая значимость работы обусловлена актуальностью многочисленных прикладных задач, связанных с эффектами отражения в лазерных системах.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XXVII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, 2005.

2. XXVIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, 2006.

3. Международная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, 2006.

4. VIII Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2006), Алушта, 2006.

5. XXXVIII Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», Санкт-Петербург, 2007.

6. XIV Конференция молодых ученых «Ломоносов-2007», Москва, 2007.

7. XX Международная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-20), Ярославль, 2007.

8. VIII Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур» (Хаос-2007), Саратов, 2007.

9. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна, Воронеж, 2008.

10. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», Москва, 2008.

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинарах «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования, «Моделирование и исследование нейронных сетей» кафедры компьютерных сетей ЯрГУ им. П.Г. Демидова, а также на семинаре кафедры теории динамических систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 17 работ: 8 статей, 3 из которых в журналах, входящих в перечень ВАК, и 9 тезисов докладов. Из работ, выполненных совместно, в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 147 наименований. Диссертация содержит 46 рисунков и четыре приложения. Общий объем диссертации составляет 148 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы исследования, приводится общая характеристика диссертации, а также ее структура, дается краткий обзор литературы по тематике работы.

Первая глава содержит сведения о происхождении изучаемых моделей, а также подробный обзор результатов, полученных к настоящему моменту, по динамике полупроводниковых лазеров с запаздывающей оптической обратной связью.

В разделе 1.1 дается вводная информация об уравнениях динамики лазерных систем, их классификации, приводятся основополагающие модели Максвелла-Блоха, Лоренца-Хакена. Кратко описываются сценарии перехода к хаотической генерации. Делается попытка проследить взаимосвязи между различными моделями и выявить происхождение исследуемых в работе систем.

В разделе 1.2 содержится обзор результатов, связанных с изучением модели Ланга-Кобаяши (1). Простейшие решения вида

$$E(t) = R_k \cdot e^{i(\omega_k - \omega_0)\,t}, \qquad Z(t) = Z_k,$$

находятся из трансцендентного уравнения относительно $\eta_k{=}\omega_k h$:

$$\eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1+\alpha^2}\,\sin\bigl(\eta + \mathrm{arctg}(\alpha)\bigr), \tag{2}$$

и называются модами внешнего резонатора. Освещены вопросы их устойчивости, описаны происходящие в системе бифуркации. Дается обзор сложных режимов, таких как колебания Петермана-Тейгера, регулярные и нерегулярные импульсные пакеты, низкочастотные флуктуации, когерентный коллапс, а также их свойств. Рассказывается о мостах между модами внешнего резонатора. Обнаруженные численными методами, они позволяют объяснить механизм возникновения хаотических режимов в системе Ланга-Кобаяши. Приведен ряд редуцированных моделей, проливающих по мнению их авторов свет на те или иные динамические свойства исходной задачи.

В разделе 1.3 приводятся сведения о различных известных модификациях модели Ланга-Кобаяши. Особое внимание уделяется системе уравнений, учитывающей воздействие оптического фильтра:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1{+}i\alpha)EZ + \gamma f, \\ \dfrac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t{-}h)e^{-i\omega_0 h} - f], \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1{+}Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $E(t)$ и $f(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля внутри резонатора и на выходе из фильтра соответственно, $Z(t)$ пропорционально инверсии носителей; Λ — ширина спектра; Δ — расстройка между частотой излучения уединенного лазера и несущей частотой фильтра; физический смысл остальных параметров тот же, что в системе (1).

Приводятся факты о модах внешнего фильтра — простейших решениях системы (3).

Вторая глава посвящена исследованию динамических свойств моделей полупроводникового лазера методом большого параметра.

В разделе 2.1 производится описание и обоснование методики, лежащей в основе дальнейшей работы. В ее основе лежат те же идеи, что и в алгоритмах исследования сингулярно возмущенных систем ОДУ. Используемая методика является модификацией этого подхода для уравнений с запаздыванием вида

$$x' = F(x) + \varepsilon \cdot \Phi\left(x,\, x(s{-}h\varepsilon^{-1})\right), \tag{4}$$

где ε — малый положительный параметр. Суть методики заключается в переходе от большого параметра к малому и разложении решения изучаемой системы в асимптотический ряд по степеням малого параметра:

$$V(s,\varepsilon) = V_0(\tau) + \varepsilon V_1(t,\tau) + \varepsilon^2 V_2(t,\tau) + \dots, \tag{5}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon\varphi(t) + \varepsilon^2\psi(t) + \dots \quad . \tag{6}$$

Здесь $V_j(t,\tau)$ являются T-периодичными по τ, причем $V_0(s)$ есть периодическое решение системы ОДУ «нулевого приближения» $x'{=}F(x)$, $\varphi(t)$ — скалярная почти периодическая функция, а «медленное» время t связано со временем системы (4) равенством $t{=}\varepsilon s$.

Выполняя подстановку рядов (5), (6) в систему (4) и собирая слагаемые одного порядка малости, получаем совокупность дифференциальных уравнений. Из условий их разрешимости в классе T-периодических функций приходим к системе уравнений, играющей роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (4) в некоторой окрестности решения $V_0(s)$ системы «нулевого приближения» $x'{=}F(x)$.

В разделе 2.2 исследуется случай $Q, v{\gg}1$ — наиболее простой случай в системе Ланга-Кобаяши, связанный с наличием в ней больших параметров. Предельный цикл системы «нулевого приближения» имеет один единичный мультипликатор. Из условий периодичности функции V_1 по τ получается уравнение вида

$$\varphi(t) = -\gamma\sqrt{1{+}\alpha^2}\sin\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0}\varphi(t{+}r)dr + \operatorname{arctg}(\alpha)\right), \tag{7}$$

называемое квазинормальной формой системы (1) при $Q, v{\gg}1$. Численно и аналитически устанавливается наличие у него устойчивых стационарных решений, соответствующих модам внешнего резонатора исходной модели.

В разделе 2.3 изучается более сложный случай, когда только параметр накачки Q асимптотически велик. Здесь система «нулевого приближения» $x'{=}F(x)$ является консервативной и имеет континуум негрубых периодических решений, амплитуда c которых определяется начальными условиями. Действуя далее в соответствии с изложенной методикой, приходим к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой для модели Ланга-Кобаяши в случае $Q{\gg}1$:

$$\begin{cases} c'(t) = v\left(\dfrac{1}{c(t)} - c(t)\right) + \gamma\cos\left(\omega_0 h + \displaystyle\int\limits_{-h}^{0}\varphi(t{+}r)dr\right)c(t{-}h)\,, \\ \varphi(t) = v\alpha\left(\dfrac{1}{c^2(t)} - 1\right) - \gamma\sin\left(\omega_0 h + \displaystyle\int\limits_{-h}^{0}\varphi(t{+}r)dr\right)\dfrac{c(t{-}h)}{c(t)}\,. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь величина c характеризует периодические решения системы «нулевого приближения». Система (8) при выполнении замены

$$E(t){=}c(t)e^{i\theta(t)}, \qquad \text{где} \qquad \theta\,'(t){=}\varphi(t),$$

допускает представление в более простом виде:

$$\frac{dE}{dt} = v(1{+}i\alpha)\left(|E|^{-2}{-}1\right)E + \gamma e^{-i\omega_0 h}E(t{-}h). \tag{9}$$

Устойчивость состояний равновесия системы (8) определяется расположением на комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 2\lambda\gamma\cos\eta_k(1-e^{-\lambda h}) + \gamma^2(1-e^{-\lambda h})^2+\\ +2(v-\gamma\cos\eta_k)[\lambda+\gamma(\cos\eta_k-\alpha\sin\eta_k)(1-e^{-\lambda h})]=0.\end{aligned} \tag{10}$$

В случае $\cos\eta_k{=}1$ для моды с максимальным усилением уравнение (10) сводится к следующей простой совокупности:

$$\left[\begin{aligned}\lambda+\gamma(1-e^{-\lambda h})=0\,,\\ \lambda+\gamma(1-e^{-\lambda h})+2(v-\gamma)=0\,.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Исследуя (11), делаем вывод, что при большой накачке мода с максимальным усилением устойчива вне зависимости от значений других параметров.

Мода с минимальной шириной линии (с точностью до 2π) достигается при $\eta_k{=}-\operatorname{arctg}(\alpha)$. Достаточным условием ее устойчивости является следующая

Теорема 1. *Пусть $\eta_k{=}-\operatorname{arctg}(\alpha)$ и $\gamma\le\gamma_1=\frac{v}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Тогда все корни уравнения (10) имеют неположительные вещественные части и соответствующее состояние равновесия (8) является устойчивым.*

При $h{\to}\infty$ можно перейти от системы уравнений (8) к отображению вида

$$\left\{\begin{aligned}-v\left(\frac{1}{c_{n+1}}-c_{n+1}\right)=\gamma\cos\left(\Omega+\theta_{n+1}-\theta_n\right)c_n\,,\\ -m+v\alpha\left(\frac{1}{c_{n+1}^2}-1\right)=\gamma\sin\left(\Omega+\theta_{n+1}-\theta_n\right)\frac{c_n}{c_{n+1}}\,,\end{aligned}\right. \tag{12}$$

где m обозначено одно из решений трансцендентного уравнения (2).

Если начальные условия удовлетворяет неравенству $c_0^2{>}c_{bnd}^2$, где

$$c_{bnd}^2=\frac{2}{\gamma^2}\left[\sqrt{(v^2(1{+}\alpha^2)+\alpha vm)^2+(vm)^2}-(v^2(1{+}\alpha^2)+\alpha vm)\right],$$

то единственным аттрактором этой динамической системы будет неподвижная точка

$$\begin{aligned}c_*^2=\frac{v^2(1{+}\alpha^2)+\alpha vm+v\sqrt{\gamma^2(1{+}\alpha^2)-m^2}}{v^2+(m{+}\alpha v)^2-\gamma^2},\\ \theta_*=\operatorname{arctg}(\alpha)+\arcsin\left(\frac{m}{\gamma\sqrt{1{+}\alpha^2}}\right)-\arccos\left(\frac{v}{\gamma}\left[1-\frac{1}{c_*^2}\right]\right),\end{aligned}$$

где $\theta_*=\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_{n+1}-\theta_n)$.

Наиболее интересный случай $\theta_*{\to}0$, $m{\to}0$ соответствует моде с минимальной шириной линии.

Исследуя устойчивость минимального порогового состояния, получим характеристическое уравнение

$$(\mu\lambda)^2 + 2\mu\lambda\frac{\gamma}{\sqrt{1{+}\alpha^2}}\,(1{-}e^{-\lambda}) + \gamma^2(1{-}e^{-\lambda})^2 + \\ +2\left(v{-}\frac{\gamma}{\sqrt{1{+}\alpha^2}}\right)\left[\mu\lambda{+}\gamma\sqrt{1{+}\alpha^2}(1{-}e^{-\lambda})\right] = 0, \qquad (13)$$

где $\mu{=}h^{-1}$ есть малый параметр, но $\varepsilon{=}o(\mu)$. В случае большого запаздывания существует критерий устойчивости моды с минимальной шириной линии.

Теорема 2. *Пусть* $\eta_k{=}{-}\operatorname{arctg}(\alpha)$ *и* $\gamma < \gamma_2 = \frac{2v\sqrt{1+\alpha^2}}{2+\alpha^2}$. *Тогда все корни уравнения (13) имеют неположительные действительные части. В случае* $\gamma{>}\gamma_2$ *существует корень с положительной вещественной частью.*

Численное исследование системы (8) показало наличие у нее решений со сложной структурой. Были обнаружены явления мультистабильности, кризиса аттракторов, последовательного удвоения периода циклов, определены области с хаотической и сложной нехаотической динамикой. Отмечено хорошее соответствие между различными режимами и бифуркациями, наблюдаемыми в системе (8) и фактами, известными о феномене когерентного коллапса — сложном динамическом состоянии, возникающем при достаточно больших величинах обратной связи и накачки.

Раздел 2.4 посвящен изучению случая $v{\gg}1$ в модели Ланга-Кобаяши. Построен асимптотический ряд вида (5), (6), в который раскладывается решение системы (1) в данной ситуации. Из условий разрешимости соответствующих уравнений в классе периодических (или почти периодических) функций получаем интегральное уравнение вида (7) и комплексное уравнение

$$\xi' = -a\,\xi - b_k\,\left[\xi - e^{ih\sqrt{2Qv}}\,\xi(t{-}h)\right] + i\,\xi|\xi|^2, \qquad (14)$$

где

$$a = \frac{1}{2}(1{+}Q), \qquad b_k = \frac{1}{2}\gamma[\cos\eta_k{+}\alpha\sin\eta_k], \qquad \eta_k = \omega_k h.$$

Нулевому решению (14) соответствует периодическое решение вида

$$E{=}R_k e^{i(\omega_k-\omega_0)t}, \qquad Z{=}Z_k$$

системы (1). Таким образом, уравнение (14) описывает локальную динамику в окрестности мод внешнего резонатора, каждой из которых соответствует свое значение k и свое значение параметра b_k уравнения (14).

Устойчивость нулевого решения (14) определяется расположением на комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\lambda = -a - b_k\left(1{-}e^{-\lambda h+ih\sqrt{2Qv}}\right). \qquad (15)$$

Достаточным условием устойчивости такого решения является

Теорема. *Пусть $Q>0$, то есть $a>\frac{1}{2}$ и выполнено соотношение $a\geq -2b_k$. Тогда все корни уравнения (15) имеют неположительные вещественные части. В этом случае нулевое решение уравнения (14) устойчиво.*

При асимптотически больших значениях параметра v задача изучения бифуркаций мод внешнего резонатора в терминах системы (14) формулируется проще, чем в исходных уравнениях (1) и допускает, в отличие от (1), надежный численный анализ. В частности, легко получается оценка критического значения параметра обратной связи, при котором мода теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

В разделе 2.5 полученные ранее результаты нормализации переносятся на случай модели с фильтром. В замене (5), (6) используется два времени τ_1 и τ_2. Действуя далее в соответствии с изложенным алгоритмом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -c(t)\gamma\sqrt{1+\alpha^2}\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)\big)dr + \mathrm{arctg}(\alpha)\right), \\ c'(t) = \Lambda\left[\cos\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right) - c(t)\right], \\ \varphi_2(t) = \Delta - \dfrac{\Lambda}{c(t)}\sin\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right), \end{cases} \tag{16}$$

где величина c характеризует периодические решения системы «нулевого приближения». Система (16) является квазинормальной формой модели (3) при $v, Q\gg 1$.

Аналогично в случае большой накачки $Q\gg 1$ приходим к системе

$$\begin{cases} c_1'(t) = v\left(\dfrac{1}{c_1(t)} - c_1(t)\right) + \gamma\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right)c_2(t), \\ \varphi_1(t) = v\alpha\left(\dfrac{1}{c_1^2(t)} - 1\right) + \gamma\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right)\dfrac{c_2(t)}{c_1(t)}, \\ c_2'(t) = \Lambda\left[c_1(t-h)\cos\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right) - c_2(t)\right], \\ \varphi_2(t) = \Delta - \Lambda\sin\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r)-\varphi_1(r)\big)dr\right)\dfrac{c_1(t-h)}{c_2(t)}, \end{cases} \tag{17}$$

которую будем называть квазинормальной формой модели (3) при $Q \gg 1$. Здесь величины c_1 и c_2 характеризуют периодические решения системы «нулевого приближения». Как и для стандартной модели Ланга-Кобаяши при выполнении аналогичных замен система (17) допускает компактную запись

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)\left(|E|^{-2}-1\right)E + \gamma f, \\ \dfrac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f]. \end{cases} \tag{18}$$

Численный анализ показывает, что динамика (17) оказывается существенно проще, чем (8). В пределах точности вычислений при $\gamma<v$ и $0<h<10$ вне зависимости от значений других параметров удавалось обнаружить лишь один аттрактор — устойчивое состояние равновесия, которому соответствует простой периодический режим в системе (3).

Таким образом, в случае большой величины накачки модель с фильтром, несмотря на кажущуюся сложность, демонстрирует более простую динамику, нежели исходная система Ланга-Кобаяши. Вне зависимости от интенсивности запаздывающей оптической обратной связи в системе (3) устанавливается простой периодический режим, соответствующий стабильному рабочему режиму генерации. Следовательно, фильтрование отраженного электромагнитного излучения представляет собой действенный механизм преодоления динамического хаоса. Отмеченный стабилизирующий эффект от использования оптического фильтра может быть принят во внимание в различных приложениях полупроводниковых лазеров.

В разделе 2.6 изучаются ситуации, когда параметры рассматриваемых моделей меняются с течением времени. Содержательные результаты получены в случае, когда параметры содержат быстро осциллирующие составляющие.

Пусть параметры модели Ланга-Кобаяши (1) имеют вид

$$\gamma = \gamma_0+\gamma_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \qquad h = h_0+h_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \qquad \alpha = \alpha_0+\alpha_1\sin(t\varepsilon^{-2}),$$

$$v = \varepsilon^{-1}[v_0+v_1\sin(t\varepsilon^{-2})], \qquad Q = \varepsilon^{-1}[q_0+q_1\sin(t\varepsilon^{-2})].$$

Пользуясь изложенным алгоритмом, из соответствующих условий разрешимости получим следующее уравнение:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\gamma_0+\gamma_1 r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{1+\alpha_2^2}\sin\left(\omega_0 h(r) + \operatorname{arctg}(\alpha_2) + \int\limits_{-h(r)}^{0}\varphi(t+u)\,du\right)dr\,, \tag{19}$$

где

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 v_1}{2v_0}, \qquad h(r) = h_0+h_1 r.$$

В случае $v_1{=}\gamma_1{=}\alpha_1{=}0$ это уравнение упрощается:

$$\varphi(t) = -\gamma\sqrt{1{+}\alpha^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\Bigg(\omega_0(h_0{+}h_1\sin r) + \operatorname{arctg}(\alpha) + \int\limits_{-h_0-h_1\sin r}^{0}\varphi(t{+}u)\,du\Bigg)dr\,. \tag{20}$$

При выполнении некоторых естественных условий решением уравнения (20) является состояние равновесия $\varphi_{k\varepsilon}$, близкое к постоянному решению φ_k уравнения (7). При достаточно малых ε стационарные решения квазинормальных форм (7) и (20) φ_k и $\varphi_{k\varepsilon}$ устойчивы и неустойчивы одновременно.

Пусть параметры системы (1) имеют теперь вид

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \qquad h = h_0 + h_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \qquad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1\sin(t\varepsilon^{-2}),$$
$$v = v_0 + v_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \qquad Q = \varepsilon^{-1}[q_0{+}q_1\sin(t\varepsilon^{-2})].$$

Действуя в соответствии с описанной методикой, получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} c'(t) = v_0\left(\dfrac{q_0}{c(t)}{-}c(t)\right) + \\ \qquad +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\gamma_0{+}\gamma_1 r}{\sqrt{1{-}r^2}}\cos\Bigg(\omega_0 h(r) + \int\limits_{-h(r)}^{0}\varphi(t{+}u)du\Bigg)c(t{-}h(r))\,dr\,, \\ \varphi(t) = p_0\left(\dfrac{q_0}{c^2(t)}{-}1\right) - \\ \qquad -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\gamma_0{+}\gamma_1 r}{\sqrt{1{-}r^2}}\sin\Bigg(\omega_0 h(r) + \int\limits_{-h(r)}^{0}\varphi(t{+}u)du\Bigg)\dfrac{c(t{-}h(r))}{c(t)}\,dr\,. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь

$$p_0 = v_0\alpha_0{+}\frac{v_1\alpha_1}{2}, \qquad\qquad h(r) = h_0{+}h_1 r.$$

Рассмотрим систему (21) в случае $v_1{=}\gamma_1{=}\alpha_1{=}0$. В терминах исходной задачи (1) это ситуация быстро осциллирующего запаздывания. Численный анализ системы (21) показывает, что область с постоянной генерацией расширяется при увеличении параметра h_1, а области со сложной динамикой, напротив — уменьшаются.

Таким образом, быстро вибрирующие отражающие поверхности оказывают стабилизирующее воздействие на излучение лазера.

В **третьей главе** изучаются уравнения с запаздыванием специального вида, которые встречаются в задачах управления различными технологическими процессами, например, излучением лазера или работой электронной схемы.

Раздел 3.1 посвящен исследованию бифуркации простейшего скалярного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = a\,[\,y - y(t-1)] - f(y), \tag{22}$$

где a — вещественный параметр. Предполагается, что нелинейность $f(y){:}\mathbb{R}{\to}\mathbb{R}$ имеет вид

$$f(y){=}|y|^{n-1}y.$$

Функция $f{\in}C^{n-1}(\mathbb{R})$ и при $n{>}1$ непрерывно дифференцируема. Производная определяется следующим образом:

$$f'(y){=}n|y|^{n-1},$$

так, что $f'(0){=}0$.

Устойчивость нулевого решения уравнения (22) определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda = a\left[1 - e^{-\lambda}\right] \tag{23}$$

Очевидно, уравнение (23) всегда имеет корень $\lambda{=}0$, который при $a{=}1$ становится двукратным. Легко показать устойчивость нулевого решения задачи (22) при $0{\le}a{<}1$ и неустойчивость для $a{>}1$.

При значениях параметра a больше критической величины $a{=}1$ строится нормальная форма, описывающая локальную динамику уравнения (22) на двумерном экспоненциально устойчивом центральном многообразии. Эта нормальная форма имеет вид

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{1}{3}f\,'(x) - 1\right]\dot{x} + 2\,f(x) = 0\,. \tag{24}$$

Полагаем, что $a{=}1{+}\,\varepsilon$, где ε есть малый положительный параметр, точками обозначается дифференцирование по «медленному» времени $s = \varepsilon^{1/2}t$.

Вторым методом Ляпунова и методом Понтрягина обосновывается следующее утверждение.

Теорема. *При $\varepsilon{>}0$ уравнение (24) имеет единственный предельный цикл, орбитально асимптотически устойчивый при $s{\to}\infty$.*

В ходе доказательства теоремы явно вычисляются амплитуда A и период T установившихся колебаний.

Предельному циклу в нормальной форме соответствует предельный цикл в уравнении (22). Существует связь между их характеристиками:

$$A_y = \sqrt[n-1]{\varepsilon}\, A, \qquad T_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} T.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ амплитуда колебаний $A_y \to 0$, а период $T_y \to \infty$.

Далее изучается модификация уравнения (22), в котором нелинейность зависит от малого параметра μ

$$\frac{dy}{dt} = a\,[\,y - y(t-1)] - \mu f(y). \tag{25}$$

Предполагая, что $a = 1 + \varepsilon$ и $\mu = \varepsilon^p, p \geq 0$, приходим к следующим выводам:

- В случае $0 \leq p < 1$ амплитуда установившихся колебаний в уравнении (25) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

- При $p \geq 1$ устойчивых ограниченных равномерно по ε решений у (25) нет. Таким образом, можно говорить о слишком слабом управляющем воздействии.

В разделе 3.2 рассматриваются обобщения скалярного дифференциального уравнения (22) с запаздыванием. Комплексное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = a\big[\,y - y(t-1)\big] - F(y). \tag{26}$$

Здесь $y(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, $F(y)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(0) = 0$ — комплекснозначная функция комплексного переменного, имеющее в нуле порядок малости выше первого, $a = a_1 + ia_2$ — комплексный параметр.

Граница области устойчивости нулевого состояния равновесия в плоскости параметров a_1, a_2 задается уравнением

$$a_1 = a_2 \operatorname{ctg}(a_2). \tag{27}$$

Зона неасимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (26) — область

$$\{S\colon a_1 \leq a_2 \operatorname{ctg}(a_2),\ |a_2| \leq \pi\}.$$

На ее границе появляется второй чисто мнимый корень $\lambda = i2a_2$.

Ставится задача изучения локальной динамики системы (26) в окрестности нулевого решения при условии близости параметра a к границе области S. Для этого представим параметр a как сумму $a_* + \varepsilon b$, в которой вещественная и мнимая части a_* удовлетворяют (27), ε есть малый действительный положительный параметр, $b = b_1 + ib_2$.

Нормальной формой комплексного уравнения с запаздыванием (26) является следующее уравнение

$$\dot{z} = \gamma z + \beta F_n(ze^{\lambda t})e^{-\lambda t}\,, \tag{28}$$

где функция $z(t)$ комплекснозначна, F_n — первый ненулевой член разложения $F(y)$ в ряд в окрестности нуля. В случаях $n{=}2$ и $n{=}3$ функция F_n является соответственно билинейной и трилинейной формой:

$$F_2(y) = F_2(y, y), \qquad F_3(y) = F_3(y, y, y).$$

Параметры уравнения (28) имеют вид

$$\beta = \frac{1}{1{-}\overline{a_*}}, \qquad \gamma = \frac{\lambda b}{a_*{-}|a_*|^2}.$$

В данном случае существенно условие $\lambda{\neq}0$, то есть $a_*{\neq}1$.

В особом случае $F(y){=}F_n(y){=}|y|^{n-1}y$ динамика системы (28) полностью определяется уравнением относительно $\rho{=}|z|$

$$\dot{\rho} = \mathrm{Re}\gamma \cdot \rho - \mathrm{Re}\beta \cdot \rho^n. \tag{29}$$

Бифуркация типа вилка при смене знака величиной $\mathrm{R}e\gamma$ в этом уравнении соответствует рождению устойчивого предельного цикла в (26) при выходе параметра a из области S.

Отмечается существование в системе (26) при $F(y){=}|y|^{n-1}y$ любого наперед заданного числа решений вида $y(t){=}R_k\, e^{i\theta_k t}$ при $a_1{\to}0$.

В **заключении** подводятся итоги работы, резюмируются результаты и выводы, а также намечаются направления дальнейших исследований.

В **приложении A** представлены иллюстрации, показывающие некоторые особенности динамики системы (8), в частности, различные регулярные и нерегулярные режимы, явление мультистабильности.

В **приложении B** приводятся ключевые процедуры и функции, которые написаны на языке Object Pascal для среды Delphi.

В **приложении C** собраны вспомогательные процедуры пакета символьных вычислений Maple.

В **приложении D** представлены области устойчивости нулевого решения комплексного дифференциального уравнения с нелинейностью специального вида.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих научных журналах, включенных в перечень ВАК:

1. *Глазков, Д.В.* Нормализация одного уравнения запаздыванием и бифуркация, приводящая к циклу асимптотически большого периода / Д.В. Глазков // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, №2. — С. 47–52.

2. *Глазков, Д.В.* Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае / Д.В. Глазков // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, №2. — С. 36–45.

3. *Глазков, Д.В.* Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем / Д.В. Глазков // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. — 2008. — Т. 16, №4. — С. 165–179.

Другие публикации:

4. *Глазков, Д.В.* Простейшие устойчивые режимы в модели Ланга-Кобаяши с большим запаздыванием / Д.В. Глазков // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Яросл. гос. ун-т. — Вып. 7. — Ярославль, 2005. — С. 123–130.

5. *Глазков, Д.В.* Простейшие устойчивые режимы в модели Ланга-Кобаяши с большим запаздыванием / Д.В. Глазков // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — Москва, 2005. — С. 27–32.

6. *Глазков, Д.В.* Динамические свойства нормализованной формы уравнения Ланга-Кобаяши при больших значениях параметра накачки / Д.В. Глазков, И.А. Харламов // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Яросл. гос. ун-т. — Вып. 8. — Ярославль, 2006. — С. 63–72.

7. *Глазков, Д.В.* О когерентном коллапсе в модели Ланга-Кобаяши / Д.В. Глазков // Тезисы докладов XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — Москва, 2006.

8. *Глазков, Д.В.* Хаотическая динамика в модели полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью / Д.В. Глазков // Тезисы докладов 5-й международной конференции «Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент». — Астана, 2006.

9. *Глазков, Д.В.* Локальный асимптотический анализ в модели Ланга-Кобаяши полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью / Д.В. Глазков, И.А. Харламов // Тезисы докладов международной конференции «Тихонов и современная математика», секция №6, Москва, 19-25 июня 2006. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. — С. 40–41.

10. *Глазков, Д.В.* Об асимптотике решений уравнений Ланга-Кобаяши в некоторых критических случаях / Д.В. Глазков // Тезисы докладов VIII крымской международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения». — Симферополь: инф.-изд. отд. ТНУ, 2006. — С. 47.

11. *Глазков, Д.В.* Построение нормальной формы для одного класса векторных уравнений с запаздыванием / Д.В. Глазков // Тезисы докладов XIV конференции молодых ученых Ломоносов-2007. — М., 2007.

12. *Глазков, Д.В.* Нормализация одного уравнения лазерной динамики / Д.В. Глазков // Труды 38-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. — С. 136-140.

13. *Глазков, Д.В.* О динамике одного семейства комплексных дифференциальных уравнений с запаздыванием / Д.В. Глазков // Труды 38-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. — С. 19-21.

14. *Глазков, Д.В.* Построение нормальной формы для одной задачи теории управления / Д.В. Глазков // Сборник трудов XX международной конференции «Математические методы в технике и технологиях — ММТТ-20» в 10 т., Ярославль, 28-31 мая 2007. — Ярославль: изд. ЯГТУ, 2007. — Т. 1, С. 31-32.

15. *Глазков, Д.В.* Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей динамики полупроводникового лазера / Д.В. Глазков // Тезисы докладов VIII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (Хаос-2007), Саратов, 9-14 октября 2007. — Саратов: изд. СГУ, 2007. — С. 20.

16. *Глазков, Д.В.* Динамические свойства модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае / Д.В. Глазков // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна (ВЗМШ-2008), Воронеж, 24-30 января 2008. — Воронеж: изд. ВГУ, 2008. — С. 40–41.

17. *Глазков, Д.В.* О квазинормальной форме сингулярно возмущенной модели динамики лазера с запаздыванием / Д.В. Глазков // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», Москва, 17-22 июня 2008. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. — С. 115–116.