На правах рукописи

Арапина-Арапова Елена Сергеевна

ПОЛУГРУППЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ **0-**ОБЪЕДИНЕНИЕМ ПОЛУГРУПП БРАНДТА

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль **– 2007**

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии в
ГОУВПО «Таганрогский государственный педагогический институт»

Научный руководитель -	кандидат физико-математических наук, доцент Кожевников Олег Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Кублановский Станислав Исаакович ТПО «Северный очаг», г. Санкт-Петербург
	кандидат физико-математических наук, доцент Кулабухов Сергей Юрьевич, Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, г.Шахты
Ведущая организация -	Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится «12» октября 2007 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Автореферат разослан «___» ________ 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Яблокова С.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Один из способов изучения той или иной алгебраической системы состоит в разложении ее на подсистемы из некоторого достаточно изученного класса. В теории полугрупп широко применяются разложения в объединение попарно непересекающихся подполугрупп или попарно пересекающихся в общем нуле.

В этом направлении широко известны работы Клиффорда, Андерсена, Круазо и других. В своей работе (1941) Клиффорд описал строение инверсных полугрупп, являющихся объединением групп. Позже Андерсен и Круазо независимо друг от друга указали строение полугрупп, являющихся объединением простых полугрупп.

При изучении полугрупп с нулем естественно рассматривать разложения на подполугруппы, попарно пересекающиеся в нуле. В этом случае полугруппу называют 0-*объединением* этих подполугрупп.

Заметим, что всякое утверждение о полугруппах с нулем влечет в качестве очевидного следствия некоторое утверждение о полугруппах без нуля, если предположить, что в рассматриваемой полугруппе ноль является внешним. В частности, изучая те или иные свойства 0-простых (вполне 0-простых полугрупп, полугрупп Брандта) получаем соответствующее утверждение о простых полугруппах (вполне простых полугруппах, группах). Идея эта высказана в монографии Клиффорда и Престона [7].

Полученные в диссертационной работе результаты о разложениях полугрупп в 0-объединения 0-простых полугрупп, а также в 0-объединение полугрупп Брандта очевидным образом приводят к упомянутым выше результатам Андерсена-Круазо и теоремам Клиффорда.

Изучение полугрупп, являющихся 0-объединением полугрупп Брандта представляется актуальным, так как в классе полугрупп с нулем полугруппа Брандта есть наиболее естественный аналог понятия группы:

если группа – это инверсная вполне простая полугруппа (без нуля), то полугруппа Брандта – это инверсная вполне 0-простая полугруппа (с нулем).

Полугруппы Брандта интересовали многих исследователей. Так в 1964 г. Манн [17] изучает гомоморфизмы на полугруппы Брандта; Хёнке [24] находит абстрактную характеристику 0–прямых объединений брандтовых полугрупп; Ллаллеман и Петрич [13] дают описание идеальных расширений некоторых полугрупп Брандта при помощи полугрупп Брандта; Клоуда [8, 9] находит геометрическое приложение этих полугрупп; Вехлер и Фихтнер [2, 23] при помощи группоидов Брандта и Эресмана описывают симметрию кристаллов; Т. И. Ершова [5] рассматривает проектирования полугрупп Брандта; О. Б. Кожевников [10, 11] ставит вопрос о строении полугрупп, являющихся 0-объединением полугрупп Брандта. Полугруппы Брандта изучались также Э.Г. Шутовым, Л. Михлером [19], Р. Спаниссиати [22] и многими другими.

Большинство известных к настоящему времени результатов в теории инверсных полугрупп с нулем получены в предположении категорийности в нуле (Манн, Клиффорд, Хауи, Гомеш, Кожевников и др.). Полугруппа S называется *категорийной в нуле*, если для любых a, b, $c \in S$ равенство $abc=0$ влечет либо $ab=0$, либо $bc=0$. Например, нулевое расширение малой категории есть категорийная в нуле полугруппа. В классе инверсных полугрупп условие категорийности в нуле равносильно существованию 0-ограниченного примитивного гомоморфного образа. Категорийные в нуле полугруппы, будем называть, краткости ради, *категорийными полугруппами*, как это принято, например, в работе [10].

Учитывая всё возрастающий интерес к различным подклассам класса $\mathfrak{M}$ инверсных категорийных полугрупп (см., например, [3,4]) естественно рассмотреть класс $\boldsymbol{K}$ тех полугрупп из $\mathfrak{M}$, которые являются 0-объединением полугрупп Брандта. Класс $\boldsymbol{K}$ достаточно широк: он содержит класс всех инверсных клиффордовых полугрупп с внешним нулем.

Примером полугруппы класса **K** может служить матричная полугруппа с единичной сэндвич-матрицей Δ над произвольной инверсной клиффордовой полугруппой S с нулем (не обязательно внешним) и единицей. Брандтовы компоненты здесь – матричные полугруппы с матрицей Δ над групповыми компонентами S.

Нулевое расширение фундаментального группоида любого неориентированного графа [15] также является полугруппой класса **K**, а именно 0-прямым объединением полугрупп Брандта.

Еще пример. Пусть $M=\{M_i \mid i\in I\}$ – множество попарно не пересекающихся непустых множеств. Тогда множество всех биекций, область определения и область значения которых принадлежат M (эти области могут совпадать), относительно обычной суперпозиции отображений является частичным группоидом, нулевое расширение которого является полугруппой класса **K**. Например, в качестве M можно взять – множество открытых граней (без ребер) многогранника, в частности, – какого-нибудь кристалла.

Цели работы: исследовать категорийные полугруппы, являющиеся 0-объединением полугрупп Брандта; описать строение, возможно более точное:

а) инверсных полугрупп, обладающих указанным в названии работы свойством,

б) инверсных полугрупп, являющихся 0-объединением 0-простых полугрупп,

в) найти максимальные примитивные гомоморфные образы полугрупп класса **K**.

Методы работы и научная новизна. Основной метод: исследование полугрупп с нулем при помощи умножения классов тех частичных группоидов, которые получаются из полугруппы удалением нуля. Это умножение классов частичных группоидов является аналогом введенного А.И. Мальцевым умножения классов полных (обычных) группоидов.

Инверсные категорийные полугруппы, являющиеся 0-объединением полугрупп Брандта впервые рассмотрены в [11]. Как оказалось, формулировки полученных в [10] результатов становятся намного короче, а доказательства их значительно упрощаются, если вместо исследуемой полугруппы с нулем рассматривать тот частичный группоид, который получается из данной полугруппы удалением нуля.

Для решения поставленной задачи на частичных группоидах с некоторыми условиями типа ассоциативности исследуются конгруэнции, смежные классы которых являются группоидами Брандта. Выяснилось, что на изучаемых нами частичных группоидах единственной конгруэнцией, удовлетворяющей этому требованию, является эквивалентность Грина $\mathfrak{J}$. При помощи выявления различных свойств этой эквивалентности и последующего перехода к нулевому расширению рассматриваемых частичных группоидов достигается поставленная в работе цель: описывается строение инверсных категорийных в нуле полугрупп, являющихся 0-объединением полугрупп Брандта.

Здесь необходимо отметить, что решение этой задачи на чисто полугрупповом языке представляет значительные сложности. Это вызвано следующим обстоятельством. Разложение полугруппы S на подполугруппы с общим нулем не определяет на S не только конгруэнции, но даже и эквивалентности. Попытка же изолировать ноль, считая его отдельным классом, несостоятельна: рассматриваемые разложения S таковы, что отвечающие им бинарные отношения на частичном группоиде $S\backslash\{0\}$, являясь конгруэнциями, сильными конгруэнциями не являются, а потому не являются конгруэнциями на полугруппе S их нулевые расширения (при помощи пары $(0,0)$). Именно поэтому нам предпочтительнее язык частичных действий, нежели действий полных.

Так как понятие частичного группоида встречается в настоящей работе очень часто, то представляется оправданным вместо "частичный группоид" употреблять термин "группоид". Чтобы избежать при этом терминологической путаницы, обычный группоид (то есть частичный группоид, операция в котором всюду определена) будем называть полным группоидом. Именно так понимается термин "группоид" в теории графов или, скажем, при рассмотрении группоидов Брандта или Эресмана.

Рассматривается произведение $\Sigma * \Gamma$ произвольных классов Σ, Γ группоидов. Смысл операции (*) очень близок мальцевскому умножению классов, рассмотренному в [16]. Понятие $\Sigma * \Gamma$-класса охватывает, к примеру, такие известные и важные образования, как связки полугрупп, полурешетки полугрупп того или иного заданного класса, и другие. На языке (*)-умножения можно рассматривать и понятие градуированной алгебры [12, 18].

В терминах (*)-умножения описывается строение полугрупп из $\mathscr{M}$, являющихся объединением 0-простых полугрупп, в частности, строение полугрупп класса ***K***. Отсюда непосредственно следуют упомянутый выше результат Андерсена-Круазо для инверсных полугрупп, теорема Клиффорда о строении инверсных полугрупп, являющихся объединением групп, а также основной результат работы [10]. Вводится понятие частичной полурешетки как некоторого частичного группоида. В случае полного группоида частичная полурешетка становится обычной полурешеткой. Рассматриваются частичные полурешетки полугрупп. Показано, что полугруппа, являющаяся частичной полурешеткой инверсных полугрупп, инверсна.

Все полученные результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в теории разложений полугрупп, а также при разработке семинаров и спецкурсов по алгебре. Диссертационная работа взята за основу при чтении спецкурсов в ТГПИ: (Таганрог)"Полугруппы Брандта" (2000-2002г.г.), "Инверсные примитивные полугруппы" (2003-2004г.г.), "Частичные группоиды с условиями типа ассоциативности" (2005-2007 г.г.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции “Математические модели физических процессов и их свойства” (Таганрог, 1997, 1999), на международной конференции “Математика в индустрии” (Таганрог, 1998), на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 1998, 2000), на II-й международной конференции “Полугруппы: теория и приложения” в честь профессора Е.С. Ляпина (Санкт-Петербург, 1999), на научной конференции “Математическое моделирование в научных исследованиях” (Ставрополь, 2000), на заседании “Герценовских чтений” (Санкт-Петербург, 2000), на алгебраических семинарах в ТГПИ (Таганрог, 1997-2006), РГПУ (Ростов-на-Дону, 1999-2000), РГПУ им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, 1999-2000), УрГУ (Екатеринбург, 2001).

Работа выполнена в рамках научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования“ (проект №1686) 1998-1999 г.г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано пятнадцать работ, в том числе, 1 статья в журнале из списка допущенных ВАК РФ. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 параграфов (11 подпунктов) и списка литературы. Список цитируемой литературы содержит 60 наименований. Текст диссертации изложен на 98 страницах.

Содержание диссертации

Во **введении** дан обзор основных результатов и используемых методов.

В **§1, §2** рассматриваются общие свойства частичных группоидов. В терминах **§§1,2** излагаются основные результаты работы. Имеют они и определенный самостоятельный интерес.

Вместо "$a\circ b$ определено в S" условимся писать: $a\circ b\neq\varnothing$.

Группоид $(S;\cdot)$ называется *идемпотентным* (*коммутативным*, *слабо ассоциативным*, *ассоциативным*, *катенарным*), если $a^2=a$ ($ab=ba$; из того, что $(ab)c \neq \varnothing \neq a(bc)$ следует $(ab)c=a(bc)$; $(ab)c=a(bc)$; из того, что $ab \neq \varnothing \neq bc$ следует $(ab)c \neq \varnothing \neq a(bc)$) для любых $a,b,c \in S$. *Частичной полурешеткой* назван идемпотентный коммутативный слабо ассоциативный группоид.

Пусть $(S;\cdot)$ - произвольный группоид, 0 – некоторый символ, $0 \notin S$. Множество $S \cup \{0\} = S^\circ$ относительно действия

$$a \circ b = \begin{cases} c, \text{ если } a \cdot b = c, \\ 0, \text{ если } a \cdot b = \varnothing \end{cases}$$

является полным группоидом и называется *нулевым расширением* группоида S.

Прямым объединением группоидов S_i $(i \in I)$ называется нулевое ограничение 0-прямого объединения нулевых расширений S_i° группоидов S_i. Иными словами, прямое объединение группоидов S_i $(i \in I)$ – это группоид $(S;\cdot)$, где $S = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$, S_i - замкнутые подгруппоиды в S и $S_i \cdot S_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

В классе ассоциативных группоидов, точно так же, как и для полугрупп, вводятся понятия *регулярного группоида*, *инверсного группоида* и *группового элемента*.

Ассоциативный группоид S называется *связным*, если $xSy \neq \varnothing$ для любых $x,y \in S$.

В доказательстве основных теорем использованы следующие предложения

Предложение 2.6. *Каждый ассоциативный регулярный катенарный группоид есть прямое объединение связных ассоциативных регулярных катенарных группоидов.*

Из этого предложения непосредственно следует известное утверждение о том, что всякая инверсная категорийная полугруппа есть 0-прямое объединение связных инверсных категорийных полугрупп.

Предложение 2.9. *Ассоциативный инверсный катенарный группоид, каждый элемент которого является групповым, есть прямое объединение инверсных клиффордовых полугрупп.*

Полугруппа, являющаяся 0-объединением подполугрупп Брандта, называется 0-*вполне регулярной*. Если при этом ноль внешний, то получаем вполне регулярную полугруппу.

Эквивалентность τ на группоиде S (здесь и далее группоиды рассматриваются в мультипликативной терминологии) называется конгруэнцией, если для любых $a,b\in S$ существует такой элемент $c\in S$, что $\tau_a \cdot \tau_b \subseteq \tau_c$.

Группоид, принадлежащий классу P, называется P-группоидом.

Для произвольных абстрактных классов Σ, Г группоидов обозначим через $\Sigma *$Г класс всех тех группоидов S, для которых существует такая конгруэнция τ, что факторгруппоид S/τ принадлежит Г, а каждый τ-класс, как частичный группоид в S, принадлежит Σ.

Если Г состоит из частичных полурешеток, изоморфных частичной полурешетки Y, то $\Sigma *$Г – группоид называется *частичной полурешеткой Y группоидов класса* Σ.

Понятие $\Sigma *$Г-группоида встречается при рассмотрении градуированной алгебры, как линейной алгебры L над полем, разложимой в прямую сумму собственных подпространств $\{ L_m \mid m \in N^\circ \}$ так, что

$$L_m \cdot L_n \subset L_{m+n}$$

для всех $m,n \in N^\circ$.

Действительно, если Г – класс всех ограничений [14] аддитивной полугруппы целых неотрицательных чисел, то L обладает таким порождающим подпространством M, что мультипликативный частичный группоид

$M\backslash\{0\}$ является Г– группоидом тех группоидов, нулевые расширения которых являются собственными линейными подпространствами в L.

Это же можно сказать и о Z_m–градуируемых линейных алгебрах [20].

Особый интерес представляет тот случай, когда в определении (*)-умножения конгруэнция τ такова, что каждый τ-класс замкнут и умножение в нем не пусто. В этом случае $S/_{\tau}$ становится идемпотентным частичным группоидом.

Известно [7], что полурешетка инверсных полугрупп есть инверсная полугруппа. В **§3** доказана более общая

Теорема 3.14. *Пусть S – ассоциативный группоид. Если S – частичная полурешетка инверсных группоидов, то S – инверсный группоид.*

Основными теоремами **§4** являются следующие

Теорема 4.9. *Произвольная категорийная полугруппа S является инверсной 0-вполе регулярной полугруппой тогда и только тогда, когда S – катенарная частичная полурешетка полугрупп Брандта.*

Указывается условие изоморфизма.

Как и для полных группоидов рассматривается транзитивная система гомоморфизмов группоидов. Пусть $<Y;\leq>$ – частично упорядоченное множество, $\{S_\alpha \mid \alpha\in Y\}$ – множество попарно непересекающихся группоидов. Для каждой пары элементов $\alpha,\beta\in Y$ таких, что $\beta\leq\alpha$ фиксируем отображение $\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\rightarrow S_\beta$. Полученная система отображений называется *транзитивной системой отображений* на данном частично упорядоченном множестве группоидов, если $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=\varphi_{\alpha,\gamma}$ и для любого $\alpha\in Y$ отображение $\varphi_{\alpha,\alpha}$ является тождественным преобразованием множества S_α ($\alpha\in Y$).

Следующая теорема устанавливает более точное строение указанных в теореме 4.9 полугрупп.

Теорема 4.16. *Пусть* $(Y;\circ)$ *– катенарная частичная полурешетка;* $\{B_\alpha | \alpha\in Y\}$ *– множество попарно пересекающихся в нуле 0 полугрупп Брандта и пусть задана транзитивная система 0–ограниченных гомоморфизмов* $\varphi_{\alpha,\beta}: B_\alpha \to B_\beta (\alpha\geq\beta)$, *удовлетворяющая условию: для любых* $\lambda,\mu\in Y$

$$\lambda\circ\mu\neq\varnothing \Leftrightarrow (\exists \nu\in Y)(\exists x\in B_\lambda)(\exists y\in B_\mu)(\nu\leq\lambda)\&(\nu\leq\mu)\&(x\varphi_{\lambda,\nu}=y\varphi_{\mu,\nu})$$

На множестве $S=\bigcup_{\alpha\in Y} B_\alpha$ *определим действие* $(\cdot)$, *полагая для любых* $a\in B_\alpha$, $b\in B_\beta$:

$$a\cdot b=\begin{cases} a\varphi_{\alpha,\alpha\circ\beta}\cdot b\varphi_{\beta,\alpha\circ\beta}, & \text{если } \alpha\circ\beta\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если } \alpha\circ\beta=\varnothing \end{cases}$$

$$a\cdot 0=0=0\cdot a=0\cdot 0.$$

Тогда $(S;\cdot)$ *–инверсная категорийная 0–вполне регулярная полугруппа. Обратно, каждая инверсная категорийная 0–вполне регулярная полугруппа устроена подобным образом.*

Если в формулировке теоремы 4.16 операция $(\circ)$ в Y полная (т.е. Y – полурешетка), то полугруппа $(S;\cdot)$ есть строгая 0-полурешетка [6] полугрупп Брандта.

Если в теоремах 4.9, 4.16 предположить, что ноль внешний, то, удаляя его, получаем теоремы Клиффорда о строении инверсных полугрупп, являющихся объединением групп.

Теорема 4.18 выясняет строение инверсных категорийных в нуле полугрупп, являющихся объединением декартовых полугрупп. *Декартовой полугруппой* называют полугруппу, изоморфную матричной полугруппе с единичной матрицей над единичной группой с нулем.

Теорема 4.18. *Пусть* $(Y;\circ)$ *– катенарная частичная полурешетка;* $\{M_\alpha | \alpha\in Y\}$ *– множество попарно непересекающихся непустых множеств таких, что* $|M_\alpha|\leq|M_\beta|$ *при* $\beta\leq\alpha$. *Для любых* $\alpha,\beta\in Y$ $(\beta\leq\alpha)$ *зафиксируем инъективное отображение* $\varepsilon_{\alpha,\beta}: M_\alpha\to M_\beta$ *так, чтобы система отображений* $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ $(\beta\leq\alpha)$ *была транзитивной и выполнялось условие: для любых* $\lambda,\mu\in Y$ *всегда*

$$\lambda \circ \mu \neq \varnothing \Leftrightarrow (\exists \nu \in Y)(\exists x \in M_\lambda)(\exists y \in M_\mu)(\nu \le \lambda) \,\&\, (\nu \le \mu) \,\&\, (x\varepsilon_{\lambda,\nu} = y\varepsilon_{\mu,\nu})$$

Обозначим $M_\alpha \times M_\alpha = D_\alpha$ $(\alpha \in Y)$, $D_\alpha \cup \{0\} = D_\alpha^\circ$, $S = \bigcup_{\alpha\in Y} D_\alpha^\circ$ *и определим действие* $(\cdot)$ *на* S, *полагая для любых* $(i,j),(k,l) \in S$, $(i,j) \in D_\alpha$, $(k,l) \in D_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$:

$$(i,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i\varepsilon_{\alpha,\alpha\circ\beta}, l\varepsilon_{\beta,\alpha\circ\beta}), & \text{если } \alpha\circ\beta \neq \varnothing \,\&\, j\varepsilon_{\alpha,\alpha\circ\beta} = k\varepsilon_{\beta,\alpha\circ\beta}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$0\cdot(i,j) = 0 = (i,j)\cdot 0 = 0\cdot 0.$$

Тогда $(S;\cdot)$ *- категорийная инверсная полугруппа, являющаяся 0-объединением декартовых полугрупп. Обратно, произвольная категорийная инверсная полугруппа, являющаяся 0-объединением декартовых полугрупп, изоморфна полугруппе, устроенной подобным образом.*

В **§ 5** приводится описание конгруэнции Манна на произвольной категорийной инверсной 0-вполне регулярной полугруппе S. Это, как известно, равносильно описанию максимальных инверсных примитивных гомоморфных образов полугруппы S.

Конгруэнция β на полугруппе S с нулем 0 называется *конгруэнцией Манна*, если β - наименьшая из всех конгруэнций на S таких, что S/β - примитивная инверсная полугруппа (или, как иногда говорят, полугруппа Эресмана).

Предложение 5.3. *Пусть* S *– категорийная инверсная 0-вполне регулярная полугруппа, то есть, согласно теореме 4.9,* S *– некоторая частичная полурешетка* Y *полугрупп Брандта. Тогда конгруэнция Манна на* S *имеет вид:* $\beta = \{(a,b) \in S\times S \mid (\exists\gamma\in Y) a\varphi_{\alpha,\gamma} = b\varphi_{\beta,\gamma}\} \cup \{(0,0)\}$, *где* $\varphi_{\alpha,\gamma}$, $\varphi_{\beta,\gamma}$ *– гомоморфизмы, отмеченные в формулировке теоремы 4.16.*

В работе Д. Хауи, Г. Гомеш [13] исследуется так называемое условие E^*-унитарности некоторого класса инверсных категорийных полугрупп. С помощью приемов, разработанных в предыдущих параграфах, рассматривается условие E^*-унитарности произвольной полугруппы класса ***K***.

Доказываемый, в завершение, критерий разложения инверсных полугрупп в 0-объединение 0-простых полугрупп приводит, в частности, к известному результату [1] о строении инверсных полугрупп, являющихся объединением простых полугрупп.

Теорема 5.11. *Произвольная категорийная полугруппа S есть инверсная полугруппа, разложимая в 0-объединение 0-простых полугрупп, тогда и только тогда, когда частичная полурешетка J(S) ненулевых главных идеалов относительно пересечения катенарна, а сама полугруппа S есть частичная полурешетка J(S) инверсных 0-простых полугрупп.*

Список цитируемой литературы

1 *Андерсен* (Andersen O.) Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen, Thesis, Hamburg.

2 *Вехлер* (*Wechler W.*) Zur Summetriebeschreibung physikalisher Systeme// Schrifteur. Zeutraliust. Math. und Mech. 1972, №16, 103–123.

3 *Гомеш Г., Хауи Д.* (*Gracinda M.S. Gomes, J. Howie.*) A P–theorem for inverse semigroups with zero// Portugaliae Mathematica. 1996, 53, №3, 257–278.

4 *Гомеш Г., Хауи Д.* (*Gracinda M.S. Gomes, J. Howie.*) Semigroups with zero whose idempotents form a semigroup. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1998, 128A, 265-281.

5 *Ершова Т.И.* Проектирования полугрупп Брандта// Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск, 1982, с.27–39.

6 *Веларев А. В.* (*Kelarev A.V.*) Hereditary radicals and 0-bands of semigroups// Semigroup Forum,Springer-Verlag New York Inc.,1989,38, 57-76.

7 *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп// Мир, М., 1972,т.т. 1,2.

8 *Клоуда* (*Klouda J.*) Kongruenzen in Brandtschen Gruppoiden// Geom.dedic. 1974, 3, №3, 347–355.

9 *Клоуда* (*Klouda J.*) Kongruenzen in Brandtschen Gruppoiden// Potsdam. Forsch. R. 1974, B, №3, 120–122.
10 *Кожевников О.Б.* Об инверсных полугруппах, являющихся объединением полугрупп Брандта// Третий всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Тезисы сообщений. Свердловск. 1988. С.40.
11 *Кожевников О.Б.* Об одном обобщении понятия полной регулярности// Ассоциативные действия. Межвузовский сборник научных трудов. Ленинград, 1983. С.50–56.
12 *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. – М. Наука, 1977.
13 *Аллеман Д., Петрич М.* (*Lallement G. Petrich M.*) Extensions of a Brandt semigroups by another// Can. J. Math., 1970, 22, №5, 974–983.
14 *Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.* Частичные алгебраические действия// С–Петербург. 1991.
15 *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп// М.: Мир, 1980.
16 *Мальцев А.И.* Об умножении классов алгебраических систем. Сибирский математический журнал 1967, 8, № 2, 346-365.
17 *Манн* (*Munn W.D*). Brandt Congruences on inverse semigroups// Proc. Lond. Math. Soc., 1964 (3) 14, 154–164.
18 *Мерзляков Ю.А.* Рациональные группы. – М.: Наука, 1980.
19 *Михлер* (*Michler L.*) Ueber die Einbettbarkeit spezieller Kategorien in Brandtsche Gruppoide. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, Bd. 5, №1, 1961, 21–27.
20 Общая алгебра / Под ред. Скорнякова Л.А., т.1 – М.: Наука, 1990.
21 *Спаниссиати* (*Spanicciati R.*) Su un applicazione dei gruppoidi di Brandt// Rent. math., 1972, 5 (№1), 91–96.
22 *Фихтнер* (*Fichtner K.*) Brandtsche und Ehresmannche Gruppoide zur Summetriebeschreibung in der Kristallographie// Potsdam.Forsch. R., 1974, B, №3, 91–95.
23 *Хенке* (*Hoehnke H.–J.*) Zur Theorie der Gruppoide// I., Math. Nachr., 1962, 24, 137–168.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в издании, рекомендованном ВАК РФ:

1 *Арапина-Арапова Е.С.* О мальцевском произведении классов частичных группоидов. Изв. Вузов. Сев. - Кавк. регион. Естеств. науки. 2007. №2. С. 3-6.

Другие публикации:

2 *Арапина–Арапова Е.С.* Клиффордовы подполугруппы мультипликативной полугруппы матриц // Труды 40–й студенческой научно-теоретической конференции. Таганрог. 1997. С. 3–6.

3 *Кожевников О.Б., Арапина-Арапова Е.С.* Строение главных факторов мультипликативной полугруппы матриц // Международная конференция «Математические модели физических процессов и их свойства». Таганрог. 1997. С. 60-61.

4 *Арапина-Арапова Е.С.* Строение главных факторов мультипликативной полугруппы матриц. Труды Международной конференции «Математика в индустрии». Таганрог. 1998. С. 25-28.

5 *Арапина–Арапова Е.С.* О строчечных и столбцовых базисах матриц // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону. 1998. С.15.

6 *Арапина–Арапова Е.С.* О частичном группоиде линейных отображений конечномерных векторных пространств // Сборник научных работ по межвузовской программе "Университеты России – фундаментальные исследования", проект 1686, ч.1, Таганрог, 1998, с. 3–13.

7 *Арапина–Арапова Е.С.* О разложении полугрупп в объединение полугрупп Брандта// 5–я Международная конференция "Математические модели физических процессов и их свойства". Таганрог. 1999. С.62.

8 *Арапина–Арапова Е.С.* Разложение полугрупп в объединение декартовых полугрупп // II–я Международная конференция "Полугруппы: тео-

рия и приложения” в честь профессора Е.С.Ляпина. С–Петербург. 1999. С.66–67

9 *Арапина–Арапова Е.С.* О разложении инверсных полугрупп в объединение полугрупп Брандта // Сборник научных работ по межвузовской программе “Университеты России – фундаментальные исследования”, проект 1686. Таганрог. С.96–105.

10 *Арапина–Арапова Е.С.* Об одном классе инверсных 0–вполне регулярных полугрупп // Сборник научных работ преподавателей и аспирантов математических кафедр ТГПИ. Таганрог.1999. С.17–19.

11 *Арапина–Арапова Е.С., Кожевников О.Б.* О разложении инверсных категорийных в нуле полугрупп // Совр. алг. № 4 (24), Ростов–на–Дону. 1999. С. 3–5.

12 *Арапина–Арапова Е.С.* Конгруэнции на частичных группоидах, являющихся объединением группоидов Брандта // Международная школа–семинар по геометрии и анализу, посвященная 90–летию Н.В.Ефимова. Тезисы докладов. Ростов–на–Дону. 2000. С. 221–222

13 *Арапина–Арапова Е.С.* Строение частичных группоидов, являющихся объединением группоидов Брандта // Материалы всероссийской научной конференции “Математическое моделирование в научных исследованиях”, 27–30 сентября, Ставрополь. 2000.Ч.1. С.15–16.

14 *Арапина–Арапова Е.С.* О частичных полурешетках инверсных полугрупп // Сборник научных трудов преподавателей и аспирантов ТГПИ. Таганрог. 2000. С. 216–222.

15 *Арапина-Арапова Е.С.* О гомоморфизмах частичных полурешеток. Вестник ТГПИ. 2007.№1. С. 4–7.